FUNCIONES HIPERHOLOMORFAS $\#10$

CUATERNIOS

10.1. <u>Definición.</u> Se define el espacio de *cuaternios* (reales) como

$$\mathbb{H} = Cl(2).$$

En esta álgebra de Clifford, que por definición es generada por los vectores e_1, e_2, introducimos la notación $e_3 = e_1e_2$ donde ahora e_3 no es un elemento básico en la notación estándar para las álgebras de Clifford. Otra notación común es $\mathbf{i} = e_1$, $\mathbf{j} = e_2$, $\mathbf{k} = e_1e_2$. Se satisface

$$e_1e_2 = e_3,\ e_2e_3 = e_1,\ e_3e_1 = e_2,$$

$$e_2e_1 = -e_3,\ e_3e_2 = -e_1,\ e_1e_3 = -e_2,$$
$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1.$$

Por la simetría de estas relaciones, hay un ismorfismo $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ que satisface
$$e_1 \to e_2,\ e_2 \to e_3,\ e_3 \to e_1,$$
Por eso los tres "generadores" e_1, e_2, e_3 no se distinguen entre sí por ninguna propiedad intrínseca.

10.2. $\mathbb{H}$ es 4-dimensional sobre $\mathbb{R}$, sus elementos son de la forma $x = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$.

<u>Proposición.</u> (i) El conjugado de $x \in \mathbb{H}$ es $\overline{x} = x_0 - x_1e_1 - x_2e_2 - x_3e_3$.
(ii) La inversa multiplicativa de $x \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ es

$$x^{-1} = \frac{\overline{x}}{|x|^2}.$$

(iii) Los cuaternios satisfacen las identidades $|xy| = |x|\,|y|$, $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Así $\mathbb{H}$ satisface todas las propiedades que definen un campo salvo la conmutatividad. A veces se le llama un "campo no-conmutativo" (o en inglés "skew-field"). Se sabe que todos los campos no-conmutativos son isomorfos a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{H}$. La fórmula explícita para la multiplicación en $\mathbb{H}$ es

$$\begin{aligned} xy &= (x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)(y_0 + y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) \\ &= (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) \\ &\quad + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)e_1 \\ &\quad + (x_0y_2 - x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1)e_2 \\ &\quad + (x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0)e_3. \end{aligned}$$

En otras palabras, la operación de multiplicación por x por la izquierda es una función lineal $L_x(y) = xy$ con matriz

$$L_x = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_0 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix}.$$

La multiplicación por la derecha $R_x(y) = yx$ admite una matriz similar.

10.3. En el contexto de los cuaternios, decimos que un *vector* es un cuaternio con parte escalar cero, es decir $\vec{x} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Esta terminología es diferente de la terminología para las álgebras de Clifford. Podemos decir que un vector en $\mathbb{H}$ es un elemento de $\{0\} \times \mathbb{R}^3$.

Proposición. Para vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned} \vec{x}\vec{y} &= -\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \times \vec{y}, \\ |\vec{x}|^2 \, |\vec{y}|^2 &= |\vec{x} \cdot \vec{y}|^2 + |\vec{x} \times \vec{y}|^2. \end{aligned}$$

Proposición. (i) $\vec{x}\vec{y} = \vec{y}\vec{x}$ si y sólo si $\vec{x}$, $\vec{y}$ son colineales; $\vec{x}\vec{y} = -\vec{y}\vec{x}$ si y sólo si $\vec{x}$, $\vec{y}$ son ortogonales.

10.4. El subespacio vectorial $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}e_1$ es cerrado bajo multiplicación y es isomorfo a los números complejos $\mathbb{C}$, identificando e_1 con $i \in \mathbb{C}$. Lo mismo es cierto no sólo para e_2 ó e_3 en lugar de e_1, sino para $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\vec{e}$ donde $e \in \mathbb{H}$ es cualquier vector unitario ($\mathrm{Sc}\,\vec{e} = 0$, $|\vec{e}| = 1$), porque $\vec{e}^2 = -1$. De hecho,

Proposición. Todos los cuaternios con cuadrado negativo son vectores. Asimismo, todos los cuaternios con cuadrado positivo son múltiplos reales de e_0. La colección de cuaternios con cuadrado igual a un valor $-r < 0$ determinado es una 2-esfera,

$$\{\vec{x} \colon |x| = r^{1/2}\}.$$

La colección de cuaternios con cuadrado igual a un valor $r > 0$ es de dos puntos, $\{\pm r^{1/2}\}$.

10.5. Para $x \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, $x = x_0 + \vec{x}$, se representa a x en forma polar definiendo

$$\vec{e} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \quad \cos\varphi = \frac{x_0}{|x|}$$

donde $\mathrm{Sc}\,\vec{e} = 0$, $|\vec{e}| = 1$, $0 \le \varphi \le \pi/2$ y por lo tanto $\operatorname{sen}\varphi = |\vec{x}|/|x|$. La representación polar es

$$x = |x|(\cos\varphi + (\operatorname{sen}\varphi)\vec{e}).$$

<u>Proposición.</u> $(\cos\varphi + (\operatorname{sen}\varphi)\vec{e})^n = \cos n\varphi + (\operatorname{sen} n\varphi)\vec{e}$.

10.6. <u>Proposición.</u> Sea $f \in C^1(\Omega, \mathbb{H})$ tal que para cada $x \in \Omega$, existe el limite

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}(f(x+h) - f(x)).$$

Entonces hay $a, b \in \mathbb{H}$ tales que $f(x) = a + xb$ para todo $x \in \Omega$.

<u>Demostración.</u> El límite es igual en las direcciones de 1, e_1, e_2, e_3:

$$\partial_0 f = -e_1\,\partial_1 f = -e_2\,\partial_2 f = -e_3\,\partial_3 f.$$

Pongamos $g = f_0 + f_1 e_1$, $h = f_2 - f_3 e_1$. Entonces $f = g + e_2 h$, y al sustituir esta descomposicion en las derivadas direccionales mencionadas obtenemos

$$\partial_0 g + e_2\partial_0 h = -e_1\partial_1 g - e_3\partial_1 h = \partial_2 h - e_2\partial_2 g = e_1\partial_3 h - e_3\partial_3 g.$$

En todas estas fórmulas, el primer sumando está en $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}e_1$ y el segundo en $\mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3$. Por lo tanto

$$\partial_0 g = -e_1\partial_1 g = \partial_2 h = e_1\partial_3 h,$$

$$\partial_0 h = e_1\partial_1 h = -\partial_2 g = e_1\partial_3 g.$$

Al separar los términos con g, h,

$$(\partial_0 + e_1\partial_1)g = (\partial_2 + e_1\partial_3)g = 0,$$

$$(\partial_0 - e_1\partial_1)h = (\partial_2 - e_1\partial_3)h = 0.$$

Esto sugiere considerar las variables complejas $z = x_0 + ix_1$, $w = x_2 + ix_3$, y las funciones

$$G(z,w) = g(x), \quad H(z,w) = h(x).$$

Entonce G es holomorfa, mientras que H es antiholomorfa como funciones de (z,w). En particular, son de clase C^∞. También se verifica que

$$\frac{\partial}{\partial z}G = \frac{\partial}{\partial \overline{w}}H,$$
$$\frac{\partial}{\partial w}G = -\frac{\partial}{\partial \overline{z}}H,$$

porque los términos de la primera ecuación son iguales a $-i\partial_1 G = \partial_2 H$ mientras que los de la segunda son iguales a $-\partial_3 G = i\partial_2 H$. Tomamos otra derivada,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}G = \frac{\partial^2}{\partial z\partial \overline{w}}H = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial w^2}G = \frac{\partial^2}{\partial w\partial z}H = 0,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial w}G = \frac{\partial^2}{\partial \overline{z}\partial z}H = 0,$$

porque $\partial H/\partial z = \partial H/\partial w = 0$ y porque se puede intercambiar el orden de la diferenciación. Por lo tanto G es un polinomio de grado 1 en (z,w) y por un argumento similar H lo es también:

$$G(z,w) = a_G + b_G z + c_G w, \quad H(z,w) = a_H + b_H z + c_H w$$

Por esto

$$f(x) = a + \sum_{i=0}^{3} b_i x_i$$

con coeficientes cuaterniónicos $a, b_i \in \mathbb{H}$ cuyos componentes se expresan en términos de $a_G, b_G, c_G, a_H, b_H, c_H$. Volvemos a las derivadas direccionales de f para ver que

$$b_0 = -e_1 b_1 = -e_2 b_2 = -e_3 b_3.$$

de lo cual se sigue que $f(x) = a + xb_0$. $\square$

10.7. Los *operadores de Fueter* cuaterniónicos son

$$\overline{D} = \partial_0 + \vec{\partial} = \partial_0 + \partial_1 e_1 + \partial_2 e_2 + \partial_3 e_3,$$

$$D = \partial_0 - \vec{\partial} = \partial_0 - \partial_1 e_1 - \partial_2 e_2 - \partial_3 e_3.$$

La notación D se usa para evitar confusión con el operador ∂ en el álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(2)$, que no tiene el término $e_1 e_2 \partial_3$. Éstos son operadores simbólicos, que adquieren un significado según se apliquen por la izquierda o por la derecha a una función $f\colon \Omega \to \mathbb{H}$, donde Ω es un dominio en $\mathbb{H}$.

10.8. La fórmula del Teorema de Gauss para $\overline{D}$ es

$$\int_{\Omega} f\,\vec{n}\,g\,\mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega} \big((f\overline{D})g + f(\overline{D}g)\big)dV.$$

La demostración es igual que para $\overline{\partial}$, primero notando que la 3-forma

$$\omega_3 = \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \,\mathrm{d}\widehat{x}_i\, e_i$$

(que tiene la misma fórmula que anteriormente, pero un significado distinto ahora en el contexto cuaterniónico) satisface $\omega_3(v^1, v^2, v^3) = v^1 \times v^2 \times v^3$, luego deduciendo que $\omega_3 = \vec{n}\,\mathrm{d}S$ cuando se aplica a vectores tangentes a una hipersuperficie en $\mathbb{H}$. El cálculo clave para la fórmula de Gauss para $\overline{D}$ es $\mathrm{d}f \wedge \omega_3 = (f\overline{D})\,\mathrm{d}V$, $\omega_3 \wedge \mathrm{d}g = (\overline{D}g)\,\mathrm{d}V$.

10.9. El núcleo de Cauchy cuaterniónico es

$$E_3(x) = \frac{\overline{x}}{|x|^4}.$$

El operador de Cauchy cuaterniónico es

$$(F_{\partial\Omega} f)(x) = \int_{\partial\Omega} E_3(y - x)\vec{n}(y) f(y)\,\mathrm{d}S_y.$$

Proposición. $\overline{D} \circ F_{\partial\Omega} = 0$.

10.10. Proposición. Si $\overline{D}f = 0$, entonces

$$F_{\Omega}(f|_{\partial\Omega}) = f|_{\Omega}.$$

FUNCIONES HIPERHOLOMORFAS #11

Espacios lineales cuaterniónicos

11.1. Definición. Un $\mathbb{H}$-*espacio vectorial por la derecha* es un conjunto E con una operación de adición $+\colon E\times E\to E$ que hace de E un grupo conmutativo con unidad $0\in E$, y una multiplicación $E\times\mathbb{H}\to E$ que satisface $(x+y)a = xa+ya$; $x1 = x$; $x0 = 0$; $(xa)b = x(ab)$ para todos los $x,y\in E$ y $a,b\in\mathbb{H}$. (Un término más preciso es $\mathbb{H}$-*módulo por la derecha*.)

Definición. Un *subespacio* $\mathbb{H}$-*lineal por la derecha* de un $\mathbb{H}$-espacio vectorial por la derecha E es un subconjunto $E_0\subseteq E$ que es cerrado bajo adición y bajo multiplicación por la derecha: $x,y\in E_0,\ a\in\mathbb{H} \ \Rightarrow\ x+y\in E_0,\ xa\in E_0$.

Un ejemplo es $\ker D\subseteq C^1(\Omega,\mathbb{H})$ donde Ω es un dominio en $\mathbb{H}$. La notación es ambigua, tomaremos $\ker D = \{f\colon\ Df = 0\}$, luego $D(fa) = (Df)a$. Es por eso que consideramos espacios por la derecha. (El espacio $\{f\colon\ fD = 0\}$ es un subespacio por la izquierda.) Nótese que $C^1(\Omega,\mathbb{H})$ es un $\mathbb{H}$-espacio vectorial por ambos lados, es decir un espacio con multiplicación por ambos lados que satisface $(ax)b = a(xb)$.

Cada $\mathbb{H}$-espacio vectorial por la derecha tiene una *estructura subyacente* de $\mathbb{R}$-espacio vectorial, simplemente limitando la multiplicación a valores reales $a\in\mathbb{R}\subseteq\mathbb{H}$.

11.2. Definición. Una *norma* en un $\mathbb{H}$-espacio vectorial por la derecha es una función $\|\cdot\|\colon E\to[0,\infty)$ que satisface (i) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$; (ii) $\|x\| = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$; (iii) $\|xa\| = \|x\|\,|a|$.

Definición. Un $\mathbb{H}$-*producto interno* en un $\mathbb{H}$-espacio vectorial por la derecha E es una función $\langle\ \cdot\ \rangle\colon E\times E\to\mathbb{H}$ que satisface $\langle x+x', y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x',y\rangle$; $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$; $\langle xa, yb\rangle = \overline{a}\langle x,y\rangle b$; $\langle x,x\rangle\ge 0$; $\langle x,x\rangle = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$.

Un ejemplo es $\langle (p_1,\dots p_n),(q_1,\dots q_n)\rangle = \sum_i \overline{p_i}q_i$ en $\mathbb{H}^n$. Otro ejemplo es $\langle f,g\rangle = \int_\Omega \overline{f}g\,dV$ en $C(\Omega,\mathbb{H})$.

Proposición. $\|x\| = (\langle x,x\rangle)^{1/2}$ es una norma en E.

Las demás propiedades de norma en un $\mathbb{H}$-espacio son sencillas, también por las $\mathbb{R}$-propiedades correspondientes de $\| \ \|_0$.

11.3. Dado un $\mathbb{H}$-producto interno $\langle \cdot \rangle$ en E, se definen $\langle x, y\rangle_i$ por $\langle x, y\rangle = \sum_{i=0}^{3} \langle x, y\rangle_i \, e_i$.

Demostración. Es inmediato por la propiedad $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$. $\square$

Proposición. $\langle \cdot \rangle_0$ es un $\mathbb{R}$-producto interno en el $\mathbb{R}$-espacio lineal subyacente (y por lo tanto $\langle x, x\rangle_0$ es una norma), pero $\langle y, x\rangle_i = -\langle x, y\rangle_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Proposición. $\langle x, y\rangle_0 = \langle x, ye_1\rangle_1 = \langle x, ye_2\rangle_2 = \langle x, ye_3\rangle_3$. (Asi $\langle \cdot, \cdot\rangle$ está determinado por $\langle \cdot, \cdot\rangle_0$.) $\langle \cdot, \cdot \langle$ Demostración. Para $a = \sum_0^3 a_i e_i \in \mathbb{H}$ ($a_i \in \mathbb{R}$), se tiene que $\mathrm{Sc}(ae_i) = -a_i$ cuando $i = 1, 2, 3$. Apliquemos esto a $a = \langle x, y\rangle$ para obtener $\mathrm{Sc}\langle x, y\rangle = \mathrm{Sc}(\langle x, -ye_i\rangle e_i) = -\langle x, ye_i\rangle_i$. $\square$

11.4. Definición. Una función $T \colon E \to \mathbb{H}$ es $\mathbb{H}$-*lineal por la derecha* si $(\forall x \in E)(\forall a \in \mathbb{H})\ T(xa) = (Tx)a$. (Se dice que T es $\mathbb{R}$-*lineal* si se tiene con "$(\forall a \in \mathbb{R})$" en lugar de "$(\forall a \in \mathbb{H})$".)

Proposición. Sea T una función $\mathbb{H}$-lineal por la derecha. Entonces hay funciones $T_i \colon E \to \mathbb{R}$ que son $\mathbb{R}$-lineales tales que $T = \sum_0^3 T_i \, e_i$.

11.5. Recordemos que un espacio de Hilbert (real) es un espacio vectorial con producto interno tal que la métrica determinada por la norma determinada por el producto interno es completa.

Teorema de Representación de Riesz. Sea E un espacio de Hilbert real. Sea $T \colon E \to \mathbb{R}$ una función $\mathbb{R}$-lineal que es continua. Entonces existe $u \in E$ tal que $(\forall x \in E)\ Tx = \langle u, x\rangle_0$. Tal u es única.

Un $\mathbb{H}$-espacio de Hilbert por la derecha es un $\mathbb{H}$-espacio por la derecha E tal que la norma $\|\cdot\|$ determinado por su producto interno $\langle \cdot \rangle$ es completa. Un ejemplo es $L^2(\Omega, \mathbb{H})$, determinado por el producto $\mathbb{H}$-valuada

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega \overline{f} g \, \mathrm{d}V.$$

Proposición. (Teorema de Representación de Riesz cuaterniónico) Sea $T\colon E \to \mathbb{H}$ una función $\mathbb{H}$-lineal por la derecha que es continua. Entonces existe $u \in E$ tal que $(\forall x \in E)\ Tx = \langle u, x\rangle$.

Demostración. Observemos que la norma $\|\ \| = \|\ \|_0$ es la misma para los productos internos $\langle\ ,\ \rangle$, $\langle\ ,\ \rangle_0$ en el $\mathbb{H}$-espacio E y su $\mathbb{R}$-espacio subyacente. Por lo tanto el espacio real es un espacio de Hilbert.

Por el resultado anterior, $T_0 = \operatorname{Sc} T$ es $\mathbb{R}$-lineal. Es continua porque $\operatorname{Sc}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ es continua. Por el Teorema de Representación de Riesz, tomamos $u \in E$ tal que $(\forall x \in E)\ T_0 x = \langle u, x\rangle_0$.

Por la propiedad $a_i = -\operatorname{Sc}(ae_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ de cuaternios, y por la $\mathbb{H}$-linealidad de T, $T_i x = -\operatorname{Sc}(T(x)e_i) = -\operatorname{Sc} T(xe_i) = -T_0(xe_i) = -\langle u, xe_i\rangle_0$. Entonces por otro ejercicio anterior, $T_i x = -\langle u, xe_i^2\rangle_i = \langle u, x\rangle_i$.

Combinando estos hechos para $i = 1, 2, 3$ con el original para $i = 0$, tenemos $T(x) = \sum_0^3 T_i(x)e_i = \sum_0^3 \langle u, x\rangle_i = \langle u, x\rangle$. $\square$

11.6. Definición. Se escribe $x \perp y$ ($\mathbb{H}$-ortogonales) cuando $\langle x, y\rangle = 0 \in \mathbb{H}$, y se escribe $E_0^{\perp} = \{y \in E\colon\ (\forall x \in E_0)\ x \perp y\}$. Escribiremos análogamente $x \perp_0 y$ ($\mathbb{R}$-ortogonales) cuando $\langle x, y\rangle_0 = 0 \in \mathbb{R}$, y $E_0^{\perp_0} = \{y \in E\colon\ (\forall x \in E_0)\ x \perp_0 y\}$.

Los complementos ortogonales $E_0^{\perp}$, $E_0^{\perp_0}$ siempre son subespacios lineales cerrados.

Proposición. Sea $E_0 \subset E$ un $\mathbb{H}$-subespacio por la derecha. Entonces $E_0^{\perp} = E_0^{\perp_0}$.

Demostración. Claramente $x \in E_0^{\perp} \Rightarrow (\forall y \in E_0)\, \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow (\forall y \in E_0)\, \langle x, y\rangle_0 = 0 \Rightarrow x \in E_0^{\perp_0}$. Así $E_0^{\perp} \subseteq E_0^{\perp_0}$. (Puede ser útil pensar: "El cuaternio lleva más información que su parte escalar.")

Ahora sea $x \in E_0^{\perp_0}$, es decir $(\forall y \in E_0)\, \langle x, y\rangle_0 = 0$. Por un ejercicio anterior, para $i = 1, 2, 3$ tenemos $\langle x, y\rangle_i = \langle x, -ye_i\rangle_0$ lo cual es 0 cuando $y \in E_0$ porque $-ye_i \in E_0$ también. (¡Siempre fíjense que se usen las hipótesis!) Por lo tanto en esta situación "La parte escalar lleva toda la información del cuaternio" y $\langle x, y\rangle = \sum_0^3 \langle x, y\rangle_i = 0$, o sea $x \perp y$ cuando $y \in E_0$. Por lo tanto $E_0^{\perp_0} \subseteq E_0^{\perp}$ y concluimos que los dos espacios ortogonales son iguales. $\square$

Proposición. (Teorema de proyección ortogonal.) Sea E un $\mathbb{R}$-espacio de Hilbert con producto interno ($\mathbb{R}$-valuado) $\langle \cdot \rangle$. Sea $E_0 \subset E$ un subespacio ($\mathbb{R}$-lineal) cerrado. Entonces cada $x \in E$ tiene una descomposición única $x = y + z$ con $y \in E_0$, $z \in E_0^\perp$.

Proposición. Sea E un $\mathbb{H}$-espacio de Hilbert por la derecha. Sea $E_0 \subset E$ un $\mathbb{H}$-subespacio por la derecha que es un subconjunto cerrado en E con respecto a la norma $\| \cdot \|$. Sea $x \in E$. Entonces existen $y \in E_0$ y $z \in E_0^\perp$ tales que $x = y + z$, y que tal par (y, z) es único.

Este hecho se expresa como la descomposición ortogonal $E = E_0 \oplus E_0^\perp$.

Un ejemplo es $E = L^2(G, \mathbb{H})$, $E_0 = L^2(G, \mathbb{H}) \cap \ker D$.