FUNCIONES HIPERHOLOMORFAS #9

OPERADOR DE TEODORESCU

Como siempre, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ es un dominio acotado.

Definición. El operador de Teodorescu en Ω es

$$T_\Omega f(x) = \int_\Omega E_n(y-x)\, f(y)\ \mathrm{d}V_y.$$

Se dice que $T_\Omega f$ es la *transformada de Teodorescu* de f en Ω.

Notemos que los valores de f en $\partial\Omega$ no afectan el valor de $T_\Omega f$. En general no es necesario que $\partial\Omega$ sea suave para los resultados sobre T_Ω.

9.1. Proposición. Sea $p > n+1$. Sea $f \in L^p(\Omega, \mathcal{C}\ell(n)$. Entonces
(i) Para cada $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, la integral $T_\Omega f(x)$ es finita.
(ii) $T_\Omega(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$.
(iii) Sea $p > n+1$. Sea $f \in L^p(\Omega, \mathcal{C}\ell(n)$. Hay una constante $C = C(\Omega, p)$ tal que para $f \in L^p(\Omega)$,

$$\|T_\Omega f\|_p \le C\|f\|_p;$$

$$|T_\Omega f(x) - T_\Omega f(y)| \le C\|f\|_p |x-y|^{(p-n-1)/p}$$

para $x, y \in \Omega$.

En particular, $T_\Omega \colon L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ es un operador lineal acotado y su imagen está contenida en $C^0(\Omega)$.

Demostración. (i) Primero examinemos la integral cerca de x:

$$\int_{B_r(x)} |E_n(y-x)f(y)|\,\mathrm{d}V_y = \frac{1}{\sigma_n}\int_{B_r(x)} |y-x|^{-n}|f(y)|\,\mathrm{d}V_y$$

lo cual por la desigualdad de Hölder es

$$\le \Big(\int_{B_r(x)} |y-x|^{-qn}\,\mathrm{d}V_x\Big)^{1/q}\,\|f|_{B_r(x)}\|_p$$

donde $1/p + 1/q = 1$. Como $q = p/(p-1) < (n+1)/n$, tenemos $qn < n+1$, luego la integral es finita. Por otra parte, examinemos la integral lejos de x:

$$\int_{\Omega\setminus B_r(x)} |E_n(y-x)f(y)| \, \mathrm{d}V_y \leq \frac{1}{r^n} \int_{\Omega\setminus B_r(x)} |f(y)| \, \mathrm{d}V_y < \infty$$

porque $f \in L^p(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$. Por lo tanto $T_\Omega f(x)$ es finito.
(ii) Tomemos R tal que $\Omega \subseteq B_R(0)$. Para $x > 2R$,

$$|T_\Omega f(x)| \leq \frac{1}{\sigma_n} \frac{1}{R^n} \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}V$$

lo cual tiende a cero cuando $R \to 0$.
(iii) Sea $x \in \Omega$. El cálculo de la parte (i) muestra que $|T_\Omega(x)| \leq C_1 \|f\|_p$ para una constante C_1 que sólo depende de Ω y p. Luego

$$\|T_\Omega|_p \leq \big(\int_\Omega (C_1 \|f\|_p)^p \, \mathrm{d}V \big)^{1/p} \leq C\|f\|_p.$$

Para la última desigualdad, tomemos r tal que $B_r(x) \subseteq \Omega$. Consideremos $y \in B_{r/2}(x)$. Por el lema tenemos

$$|T_{\Omega - B_r(x)} f(y) - T_{\Omega - B_r(x)} f(x)| \leq C_2 |y-x| \big(\int_{\Omega - B_r(x)} |z-x|^{-(n+1)q} \, \mathrm{d}V \big)^{1/q}$$

$$\leq C_3 \big(\int_r^\infty \rho^{-(n+1)q+n} \, \mathrm{d}\rho \big)^{1/q} |y-x|$$

$$= C_3 \|f\|_q r^{1-(n+1)(q-1)/q} = C_3 \|f\|_q r^{1-(n+1)/p}$$

$$< C_4 |y-x|^{(p-n-1)/p}$$

porque $|y-x| < r/2$. Pero $T_\Omega f = \lim_{r\to 0} T_{\Omega - B_r(x)} f$ puntualmente por el teorema de Convergencia Dominada, lo cual da la desiguadad destinada. □

9.2. Proposición. $T_\Omega f$ es monogénica por la izquierda en el complemento $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{\Omega}$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega$. Como la distancia de x a Ω es positiva, $E_n(y-x)$ es acotada para $y \in \Omega$. Como $f \in L^1(\Omega)$, podemos diferenciar debajo del signo de la integral,

$$\overline{\partial} T_\Omega f(x) = \int_\Omega \overline{\partial}_x (E_n(y-x) \, f(y)) \, \mathrm{d}V = 0.$$

Por lo general, el operador T_Ω aumenta el nivel de diferenciabilidad.

Lema. Sea $f \in L^p(\Omega, \mathcal{C}\ell(n))$, $p > n+1$. Si f es continua, entonces $T_\Omega f$ es de clase C^1 y para $0 \leq i \leq n$,

$$\partial_i(T_\Omega f)(x) = -\,\text{P.V.}\int_\Omega \partial_{i,x} E_n(y-x)\, f(y)\,\mathrm{d}V_y \;+\; \overline{e_i}\frac{u(x)}{n+1}.$$

Demostración. Fijemos $x \in \Omega$. Tomemos $r > 0$ tal que $\overline{B}_r(x) \subseteq \Omega$. Por definición del kernel de Cauchy,

$$\begin{aligned} -(n-1)\sigma_n T_{\Omega\smallsetminus B_r(x)} f(x) &= -(n-1)\int_{\Omega\smallsetminus B_r(x)} E_n(y-x)\, f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\Omega\smallsetminus B_r(x)} \partial_y\big(\frac{1}{|y-x|^{n-1}}\big) f(y)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

(∂_y = derivada de Fueter en la variable y).

Primero hacemos tres supuestos para simplificar la demostración y quitarlos despues: que $\partial\Omega$ es suave, que f es escalar-valuada, y que$f$ es continuamente diferenciable. Se convertira la integral de volumen a una integral de frontera en lo posible, entonces aplicar $\partial/\partial x_i$, luego volver a convertir a una integral de volumen.

Aplicar el teorema de Gauss a las funciones $\overline{u}$ and $\overline{v}$:

$$\int_\Omega u(\partial v)\,\mathrm{d}V = -\int_\Omega (u\partial)v dV + \int_{\partial\Omega} u\overline{\vec{n}}v\,\mathrm{d}S.$$

Aplicarlo al dominio $\Omega \smallsetminus B_r(x)$:

$$T_{\Omega\smallsetminus B_r(x)} f(x) = I_1(r) + I_2 - I_3(r),$$

donde

$$\begin{aligned} I_1(r) &= \frac{1}{(n-1)\sigma_n}\int_{\Omega\smallsetminus B_r(x)} \frac{(\partial f)(y)}{|y-x|^{n-1}}\,\mathrm{d}V_y, \\ I_2 &= -\frac{1}{(n-1)\sigma_n}\int_{\partial\Omega} \frac{f(y)}{|y-x|^{n-1}}\,\overline{\vec{n}}(y)\,\mathrm{d}S_y, \\ I_3(r) &= -\frac{1}{(n-1)\sigma_n}\int_{\partial B_r(x)} \frac{f(y)}{|y-x|^{n-1}}\,\overline{\vec{n}}(y)\,\mathrm{d}S_y. \end{aligned}$$

:Puesto que

$$\int_{B_r(x} \frac{1}{|y-x|^{n-1}}\, dS_y = r^{-(n-1)} \int_{B_r(x)} dS = r^{-(n-1)}(r^n\sigma_n) = r\sigma_n$$

y que f es acotada cerca de x, tenemos $I_3(r) \to 0$ cuando $r \to 0$. Por lo tanto

$$T_{\Omega\smallsetminus B_r(x)} f(x) = I_1 + I_2$$

donde $I_1 = I_1(0)$. Ahora por las derivadas parciales calculadas anteriormente,

$$\begin{aligned}
\partial_i I_1 &= \frac{1}{\sigma_n}\int_\Omega \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}}\,(\partial f)(y)\,\mathrm{d}S_y,\\
\partial_i I_2 &= \frac{1}{\sigma_n}\int_{\partial\Omega} \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}}\,f(y)\,\vec{n}(y)\,\mathrm{d}S_y.
\end{aligned}$$

Por medio del teorema de Gauss,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial(\Omega\smallsetminus B_r(x))} \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}}\,f(y)\,\vec{n}(y)\,\mathrm{d}S_y = \int_{\Omega\smallsetminus B_r(x)} &\big(\partial_y \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}}\big)\,(\partial f)(y)\,\mathrm{d}V_y\\
+ \int_{\Omega\smallsetminus B_r(x)} &\big(\frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}}\big)\,f(y)\,\mathrm{d}V_y
\end{aligned}$$

lo cual nos permite calcular unas integrales,

$$\partial_i(T_\Omega f)(x) = I_4(r) + I_5(r) + I_6(r)$$

donde

$$\begin{aligned}
I_4(r) &= -\frac{1}{\sigma_n}\int_{B_r(x)} \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}}\,(\partial f)(y)\,\mathrm{d}V_y,\\
I_5(r) &= -\frac{1}{\sigma_n}\int_{\Omega\smallsetminus B_r(x)} \partial_{i,x} E_n(y-x)\,f(y)\,\mathrm{d}V_y,\\
I_6(r) &= \frac{1}{\sigma_n}\int_{\partial B_r(x)} \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}}\,f(y)\,\vec{n}(y)\,\mathrm{d}S_y.
\end{aligned}$$

En el cálculo de I_5 usamos la definición del kernel de Cauchy junto con el hecho $(\partial/\partial y_i)u(y-x) = -(\partial/\partial x_i)u(y-x)$. Ahora

$$I_5(r) = -\frac{1}{\sigma_n}\int_{\rho=0}^{r}\int_{w\in B_1(0)} \frac{\rho w}{\rho^{n+1}}\,(\partial f)(x+\rho w)\,(\rho^n\,\mathrm{d}S_w)\,\mathrm{d}\rho \;\to\; 0$$

cuando $r \to 0$. Por definición de P.V.$\int$, tenemos el límite

$$I_5(r) \;\to\; -\frac{1}{\sigma_n}\,\mathrm{P.V.}\!\int_G \partial_{i,x}E_n(y-x)\,f(y)\,\mathrm{d}V_y$$

cuando $r \to 0$. Finalmente,

$$\sigma_n\, I_6(r) = \int_{\partial B_r(x)} \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}}\,(f(y)-f(x))\,\overline{\vec{n}}(y)\,\mathrm{d}S_y + \int_{\partial B_r(x)} \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}}\,f(x)\,\overline{\vec{n}}(y)\,\mathrm{d}S_y.$$

Como $|u(y)-u(x)| < \epsilon$ para r pequeño, la primera integral tiende a 0 cuando $r \to 0$. Factorizamos la constasnte $u(x)$ de la segunda integral y aplicamos el teorema de Gauss:

$$\begin{aligned}
u(x)\int_{w\in\partial B_1(0)} \partial_w w_i \overline{\vec{n}}(z)\,\mathrm{d}S_w &= u(x)\int_{w\in B_1(0)} \partial_w w_i\,\mathrm{d}V_w \\
&= u(x)\sigma_n\overline{e_i}\int_0^1 \rho^n\,\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{\sigma_n}{n+1}u(x)\,\overline{e_i}.
\end{aligned}$$

De esto, $\partial_i(T_\Omega f)(x)$ tiene el valor que dice el enunciado del lema.

Ahora, a quitar la restricción que $\partial\Omega$ sea suave. Hemos demostrado el resultado para $B_r(x)$:

$$\partial_i(T_{B_r(x)}f)(x) = -\,\mathrm{P.V.}\!\int_{B_r(x)} \partial_{i,x}E_n(y-x)\,f(y)\,\mathrm{d}V_y + \overline{e_i}\frac{u(x)}{n+1}.$$

Además,

$$\partial_i(T_{\Omega\setminus B_r(x)}f)(x) = -\int_{\Omega\setminus B_r(x)} \partial_{i,x}E_n(y-x)\,f(y)\,\mathrm{d}V_y$$

porque el integrando no tiene singularidad en x, lo cual nos permite diferenciar sin preocuparnos de la falta de suavidad de $\partial\Omega$. Sumamos las dos fórmulas para obtener el resultado.

Hora, supongamos que f toma sus valores en $\mathcal{C}\ell(n)$. Ya tenemos $\partial_i T_\Omega(f_A)$ para cada $A \in 2^n$, donde $f = \sum_A f_A e_A$. Como ∂_i es un "operador escalar", al sumar tenemos la fórmula deseada para $\partial_i T_\Omega f$.

Finalmente suponemos solamente $f \in C^0(\Omega, \mathcal{C}\ell(n))$. Se puede construir una sucesión de funciones $g_j \in C^1(\Omega, \mathcal{C}\ell(n))$ tales que $g_j \to f$

uniformemente en Ω cuando $j \to \infty$. Entonces

$$\begin{aligned}(T_\Omega g_j)(x) &= \text{ P.V.}\int_\Omega E_n(y-x)\, g_j(y)\,\mathrm{d}V_y,\\ \partial_i(T_\Omega g_j)(x) &= -\text{ P.V.}\int_\Omega \partial_{i,x}E_n(y-x)\, g_j(y)\,\mathrm{d}V_y \ + \ \overline{e_i}\frac{u(x)}{n+1}.\end{aligned}$$

El límite cuando $j \to \infty$ da

$$\begin{aligned}(T_\Omega g_j)(x) &\to (T_\Omega f)(x),\\ \partial_i(T_\Omega g_j)(x) &\to -\text{ P.V.}\int_\Omega \partial_{i,x}E_n(y-x)\, f(y)\,\mathrm{d}V_y \ + \ \overline{e_i},\end{aligned}$$

y de esto se sigue que la convergencia es uniforme en una vecindad de x. Así $\{T_\Omega g_j\}$ es una sucesión de funciones con límite uniforme, cuyas derivadas parciales también tienen un límite uniforme. De esto se sigue el resultado. □

9.3. Lo siguiente complementa la fórmula $\overline{\partial} T_\Omega = 0$.

Corolario. Con las condiciones del lema, $(\partial \circ T_\Omega)f = f$ para $f \in C^0(\Omega)$.

Teorema. Let f satisfy the conditions of Lemma **??**. Then $(\overline{\partial} \circ T_\Omega)f = f$ para $f \in C^0(\Omega)$.

Demostración. Por el lema,

$$\begin{aligned}\overline{\partial}(T_\Omega f)(x) &= \sum_{i=0}^{n} e_i \partial_i (T_\Omega f)(x)\\ &= -\frac{1}{\sigma_n}\sum_{i=0}^{n} e_i \,\text{P.V.}\int_\Omega \partial_{i,x}E_n(y-x)]\, f(y)\,\mathrm{d}V_y \ + \ (n+1)\frac{u(x)}{n+1}\\ &= -\frac{1}{\sigma_n}\,\text{P.V.}\int_\Omega \overline{\partial}_x E_n(y-x)]\, f(y)\,\mathrm{d}V_y \ + \ u(x)\\ &= u(x),\end{aligned}$$

por ser monogénica $E_n(x)$. □

Proposición. $\partial_k \circ T_\Omega \colon L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ es un operador continuo.
(se omite la demostración)

9.4. <u>Proposición.</u> Fórmula de Borel-Pompeiu en $\mathcal{C}\ell(n)$.

$$(F_{\partial\Omega} f)(x) - (T_\Omega \overline{\partial}) f((x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

<u>Demostración.</u> Primero sea $x \in \Omega$. Tomamos $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$, luego la función $y \mapsto E_n(y-x)$ es una función monogénica de y. La fórmula de Gauss, con $\vec{n}(y)$ al exterior de $\Omega \setminus B_r(x)$ dice

$$\int_{\partial(\Omega - B_r(x))} E(y-x)\vec{n}(y) f(y)\, \mathrm{d}S_y = \int_{\Omega - B_r(x)} E(y-x)(\overline{\partial} f(y))\, \mathrm{d}V_y$$

porque $\overline{\partial} E = 0$. El lado izquierdo de esta igualdad es

$$(F_{\partial\Omega} f)(x) - \int_{B_r(x)} E(y-x)(-\vec{n}(y)) f(y)\, \mathrm{d}S_y$$

en el cual la integral es igual a $(F_{\partial B_r(x)}) f(x) = f(x)$ por la fórmula integral de Cauchy. El lado derecho tiende a $T_\Omega f(x)$ cuando $r \to 0$.

Por otra parte, sea $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{\Omega}$. Ahora $E_n(y-x)$ es una función monogénica de y en Ω, luego la fórmula de Gauss da

$$(F_{\partial\Omega} f)(x) = \int_{\partial\Omega} E(y-x)\vec{n}(y) f(y)\, \mathrm{d}S_y$$

$$= \int_\Omega E(y-x)(\overline{\partial} f(y))\, \mathrm{d}V_y = T_\Omega f(x). \quad \square$$

Nota. Cuando f es monogénica por la izquierda, la fórmula de Borel-Pompeiu se reduce a la fórmula integral de Cauchy.