FUNCIONES HIPERHOLOMORFAS $\#8$

OPERADOR DE CAUCHY

8.1. Fórmulas útiles. ($x = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i, \in \mathbb{R}^n$, $d = n+1$)

$$\begin{aligned} \partial_i \, x &= e_i, \\ \partial_i \, \overline{x} &= \overline{e_i}, \\ \partial_i \frac{1}{|x|^p} &= -p \frac{x_i}{|x|^{p+2}}. \end{aligned}$$

De éstas,

$$\begin{aligned} \partial x &= n+1, \\ \overline{\partial} \, \overline{x} &= n+1, \\ \partial \, \frac{1}{|x|^p} &= -p \frac{\overline{x}}{|x|^{p+2}}, \\ \overline{\partial} \, \frac{1}{|x|^p} &= -p \frac{x}{|x|^{p+2}}, \\ \Delta \, \frac{1}{|x|^p} &= \frac{p(n-p-1)}{|x|^p}. \end{aligned}$$

8.2. La función kernel (núcleo) de Cauchy para $\mathbb{R}^{n+1}$ es la función $\mathbb{R}^{n+1}$-valuada

$$E_n(x) = \big(\frac{-1}{(n-1)\sigma_n}\big) \, \partial \frac{1}{|x|^{n-1}}$$

para $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Nuevamente $\sigma_n = \operatorname{vol}_n S^n$. Frecuentemente cuando se habla del kernel de Cauchy se refiere a la función de dos variables $E_n(x-y)$. Tenemos

$$E_n(x) = \frac{1}{\sigma_n} \, \frac{\overline{x}}{|x|^{n+1}}.$$

Proposición. La función kernel de Cauchy $E_n(x)$ es monogénica por la izquierda y por la derecha en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Demostración. Se sigue del hecho que $1/|x|^{n-1}$ es armónica y $\overline{\partial}\partial = \Delta$.

8.3. Como $|x| = 1$ en $\mathbb{S}^n$, una observación sencilla es

$$\int_{\mathbb{S}^n} E_n(x)\vec{n}(x)\,\mathrm{d}S = \frac{1}{\sigma_n}\int_{|x|=1} \frac{\overline{x}}{|x|^{n+1}}\,x\ \mathrm{d}S = \frac{1}{\sigma_n}\int_{|x|=1} 1\ \mathrm{d}S = 1.$$

Por lo mismo, $\int_{\partial B_r(0)} E_n(x)\vec{n}(x)\,\mathrm{d}S = 1$ para cualquier $r > 0$ porque $\mathrm{vol}_n\,\partial B_r(0) = r^n\sigma_n$ mientras que $E_n(rx) = r^{-n}E_n(x)$.
(Similar para $\vec{n}(x)E_n(x)$.)

8.4. Proposición. Dado un multiíndice nonegativo $\vec{k} \in \mathbb{Z}^n$, hay un polinomio $q_{\vec{k}}$ de grado $|\vec{k}| + 1$ en $x_0, \ldots, x_n$, paravector-valuada y una constante $C_{\vec{k}}$ (ambos dependen de n) tales que

$$\partial^{\vec{k}} E_n(x) = \frac{q_{\vec{k}}(x)}{|x|^{n+2|\vec{k}|+1}}.$$

$$|\partial^{\vec{k}} E_n(x)| \le \frac{C_{\vec{k}}}{|x|^{n+|\vec{k}|}}.$$

8.5. Serie de potencias para el kernel de Cauchy.

Teorema. Sean $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$, con $|x| < |y|$. Entonces

$$E_n(y-x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{|\vec{k}|=m} \frac{1}{\vec{k}!}\mathcal{P}_{\vec{k}}(x)\,(\partial^{\vec{k}} E_n)(y) \qquad (*)$$

donde la serie converge absolutamente. Converge uniformemente en $x \in \overline{B}_r(0)$ cuando $r < |y|$, y uniformemente en $y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus B_r(0)$ cuando $r > |x|$.

Demostración. Ya sabemos que existe la representacion en serie en alguna vecindad de $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Se requiere extender a todo $x \in B_{|y|}(0)$. Expandemos

$$|y-x|^2 = |y|^2\left(1 - 2\alpha\frac{|x|}{|y|} + \Big(\frac{|x|}{|y|}\Big)^2\right),$$

donde

$$\alpha = \alpha_{x,y} = \cos \text{áng}(x,y) = \frac{x \cdot y}{|x|\,|y|}.$$

los ceros $t = \alpha \pm i\sqrt{1-\alpha^1}$ del polinomio cuadrático $1-2\alpha t+t^2$ están en la circunferencia unitaria en el plano complejo, luego para cada $\alpha \in (-1,1)$, hay una serie de Taylor

$$\frac{1}{(1-2\alpha t+t^2)^{(n-1)/2}} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}(\alpha)\, t^m,$$

que converge absolutamente para $|t|<1$, y uniformemente en discos más pequénos. Con $t = |x|/|y|$,

$$\frac{1}{|y-x|^{n-1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{n,m}(\alpha_{x,y})}{|y|^{n+m-1}} |x|^m,$$

que converge cuando $|x|<|y|$.

Apliquemos ∂ en la variable x:

$$\frac{\sigma_n}{n-1} E_n(y-x) = \sum_{m=0}^{\infty} \partial_x (a_{n,m}(\alpha_{x,y}))|x|^m) \frac{1}{|y|^{n+m-1}}, \qquad (**)$$

para $|x|<|y|$. En $(*)$ los sumandos con funciones homogéneas de orden negativo $-(n+m)$ en la variable y, porque E_n es homogeneous of order $-n$. En $(**)$ observamos $a_{n,m}(\alpha_{x,ry}) = a_{n,m}(\alpha_{x,y})$ para $r\in\mathbb{R}$, $r\neq 0$; luego $a_{n,m}(\alpha_{x,y})$ es homogénea en y de grado cero, luego los sumandos son homogéneos de grado $-(n+m-1)$. Identifiquemos sumandos homogéneos de orden común,

$$\frac{\sigma_n}{n-1} \mathcal{P}_{\vec{k}}(x)\, \partial^{\vec{k}} E_n(y) = \partial_x\big(a_{n+1,m}(\alpha_{x,y}))|x|^m\big) \frac{1}{|y|^{n+m}}.$$

Las funciones del lado derecho son $1/|x|$ veces los términos en $(**)$ para $E_{n+1}(y-x)$, luego su suma sobre m converge para $|x|\in B_{|y|}(0)$. Por tanto la suma de la izquierda también converge.

La convergencia para $y \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus B_{|x|}(0)$ puede deducirse de los estimados de $\partial^{\vec{k}} E_n$. □

8.6. Estimados en $\mathbb{R}^{n+1}$, relevantes al kernel de Cauchy.

Lema.

(i) Sean $a, b \in \mathcal{C}\ell(n)$ paravectores. Entonces

$$\big|\, a|b|^{n+1} - b\,|a|^{n+1} \,\big| \le |a-b|\,|b|^{n+1} + |b|\,\big|\, |b|^n + \sum_{j=1}^{n} |b|^j |a|^{n-j} \big|.$$

(ii) Hay una constante $C = C(n)$ con la siguiente propiedad. Sean $x, y, z \in \mathcal{C}\ell(n)$ paravectores, y sea

$$|y - x| \;>\; (1/2)\,\text{mín}(|z - x|, |z - y|).$$

Entonces

$$|E_n(z - y) - E_n(z - x)| < C|y - x|\,|z - x|^{-(n+1)}.$$

<u>Demostración.</u> (i) Se sigue de

$$\big|\, a|b|^{n+1} - b\,|a|^{n+1}\,\big| \le \big|\, a|b|^{n+1} - b\,|b|^{n+1}\,\big| + \big|\, b\,|b|^{n+1} - b\,|a|^{n+1}\,\big|$$

y la factorización de $|b|^{n+1} - |a|^{n+1}$.

(ii) Primero calcular

$$\begin{aligned}
&\overline{(z - y)}\,|z - x|^{n+1} - \overline{(z - x)}\,|z - y|^{n+1} \\
&\qquad = \overline{(z - x) - (y - x)}\,|z - x|^{n+1} - \overline{(z - x)}\,|z - y|^{n+1} \\
&\qquad = -\overline{(y - x)}\,|z - x|^{n+1} - \overline{(z - x)}(|z - x|^{n+1} - |z - y|^{n+1}).
\end{aligned}$$

Usando $|\,\mathrm{d}t^{-(n+1)}/\,\mathrm{d}t| = (n+1)|t^{-(n+2)}|$ se obtiene del cálculo diferencial que

$$|s^{-(n+1)} - t^{-(n+1)}| < (n+1)\,|s - t|\,(\text{mín}(s, t))^{-(n+2)}$$

cuando $s, t > 0$. En particular,

$$|\,|z - x|^{n+1} - |z - y|^{n+1}| < \frac{n+1}{2^{n+2}}\,\frac{1}{|y - x|^{n+1}}.$$

Así

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{z - y}}{|z - y|^{n+1}} - \frac{\overline{z - x}}{|z - x|^{n+1}} &= \frac{-\overline{(y - x)}}{|z - y|^{n+1}} + \overline{(z - x)}\Big(\frac{1}{|z - y|^{n+1}} - \frac{1}{|z - x|^{n+1}}\Big) \\
&\le \frac{|y - x|}{|z - y|^{n+1}} + \frac{(n+1)}{2^{n+2}}|z - x|\frac{|y - x|}{|z - x|^{n+1}} \\
&\le C\frac{|y - x|}{|z - x|^{n+1}}.
\end{aligned}$$

En la última desigualdad, usar

$$|z - x| \le |z - y| + |y - x| \le (3/2)|z - y|. \qquad \square$$

8.7. Con el kernel de Cauchy se definen varios operadores integrales. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un subconjunto abierto y acotado con frontera $\partial\Omega$ suave. Sea $\vec{n}(x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ el vector normal exterior a $\partial\Omega$ en el punto $x \in \partial\Omega$. Consideremos a $E_n(x)$ como un paravector en $\mathcal{C}\ell(n)$. Para $f \in C^0(\partial\Omega, \mathcal{C}\ell(n))$, $x \in \Omega$ se define el *operador de Cauchy* (operador de Cauchy-Bitsadze)

$$(F_{\partial\Omega} f)(x) = \int_{\partial\Omega} E_n(y-x)\vec{n}(y)f(y)\,\mathrm{d}S_y.$$

8.8. Proposición. Para $f \in C(\partial\Omega, \mathcal{C}\ell(n))$, la función $F_{\partial\Omega} f$ es monogénica por la izquierda.

Demostración. Sea $x \in \Omega$. La distancia δ de x a $\partial\Omega$ es positiva. En la vecindad $V = B_{\delta/2}(x)$ tenemos $|y-x| > \delta/2$ para $y \in \partial\Omega$, luego usando el cambio del orden de diferenciación e integración,

$$\begin{aligned}\overline{\partial}\int_{\partial\Omega} E_n(y-x)\vec{n}(y)f(y)\,\mathrm{d}S_y &= \int_{\partial\Omega} \overline{\partial}_x(E_n(y-x)\vec{n}(y)f(y))\,\mathrm{d}S_y \\ &= \int_{\partial\Omega}(\overline{\partial}_x E_n(y-x))(\vec{n}(y)f(y))\,\mathrm{d}S_y = 0. \qquad \square\end{aligned}$$

Por lo mismo, el operador de Cauchy por la derecha $\int_{\partial\Omega} f(y)\vec{n}(y)E_n(y-x)\,\mathrm{d}S_y$ produce funciones monogénicas por la derecha.

El intercambio entre $\overline{\partial}$ y $\int_{\partial\Omega}$ en la demostración anterior se justifica como sigue. Escribimos $B_{\delta/2}(\partial\Omega) = \bigcup_{y\in\partial\Omega} B_{\delta/2}(y)$. La función $E_n(x,y) = E_n(y-x)$ restringida a $x \in V$, $y \in B_{\delta/2}(\partial\Omega)$ es diferenciable y tiene una matriz jacobiana

$$J_E|_{(x,y)} \colon \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{C}\ell(n).$$

La aproximación lineal de E es

$$\big|E_n((y+w)-(x+v)) - (E_n(y-x) + J_E|_{(x,y)}(v,w))\big| = o(|v|+|w|)$$

Aplicando $v = h\vec{\delta}_i$, $w = 0$ obtenemos

$$\big|E_n(y-(x+h\delta_i)) - (E_n(y-x) + h\frac{\partial}{\partial x_i}E_n(y-x)\big| = o(|h|),$$

uniformemente en donde y varía una vecindad compacta de un punto arbitrario de $\partial\Omega$. Podemos cubrir el compacto $\partial\Omega$ con un número finito de vecindades en que el error de la aproximación lineal es menor que ϵ, y con el mínimo valor de h correspondiente obtenemos el estimado en todo $\partial\Omega$. Finalmente, deducimos que

$$\left|\frac{1}{h}\Big(\int_{\partial\Omega} E_n(y-(x+h\delta_i))\vec{n}(y)f(y)\,\mathrm{d}S_y - \int_{\partial\Omega} E_n(y-x))\vec{n}(y)f(y)\,\mathrm{d}S_y\Big)\right.$$
$$\left. - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}(E_n(y-x)\vec{n}(y)f(y))\,\mathrm{d}S_y\right| = \int_{\partial\Omega} o(|h|)\,\mathrm{d}S \to 0$$

cuando $h \to 0$. $\square$

8.9. La hipótesis de que $\partial\Omega$ sea suave puede ser relajada. Por ejemplo, si $\partial\Omega$ es suave por pedazos en un sentido razonable (como la frontera de un $(n+1)$-cubo), de manera que el vector normal $\vec{n}(x)$ está definido salvo en un subconjunto de medida cero, la misma demostración es válida. También se puede aproximar Ω por un dominios más pequeños Ω_ϵ con fronteras suaves, aplicar el resultado a ellos y pasar al límite de las integrales correspondientes. De la misma manera se puede relajar la condición $f \in C^1$ a $f \in L^\infty$ o $f \in L^2$.

8.10. Proposición. (Fórmula Integral de Cauchy) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ con frontera suave. Sea $f\colon \overline{\Omega} \to \mathcal{C}\ell(n)$ continua y $f|_\Omega$ monogénica por la izquierda. Entonces

$$F_\Omega(f|_{\partial\Omega}) = f|_\Omega.$$

(Informalmente se dice "$F_{\partial\Omega} f = f$". También se podría definir el "operador traza" $\operatorname{tr} f = f|_{\partial\Omega}$ y decir $F_{\partial\Omega} \circ \operatorname{tr} =$ identidad.)

Demostración. Para $x \in \Omega$, consideremos $r > 0$ lo suficiente pequeño que $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$. Apliquemos el Teorema de Cauchy a $f|_{\Omega - \overline{B_r(x)}}$:

$$(F_{\partial\Omega} f)(x) - (F_{\partial B_r(x)} f)(x) = 0.$$

Para ello, notamos que el vector normal $\vec{n}(y)$ que apunta hacia afuera de este dominio en $y \in \partial B_r(x)$ se apunta hacia adentro de $B_r(x)$. Con $\vec{n}(y)$ entendido así, $-\int_{\partial B_r(x)} E_n(y-x)\vec{n}(y)\,\mathrm{d}S_y = 1$, y al multiplicar por la derecha por la constante $f(x)$ podemos hacer la estimación

$$|(F_{\partial B_r(x)} f)(x) - f(x)| = \left| -\int_{\partial B_r(x)} (E_n(y-x)\vec{n}(y))(f(y)-f(x))\,\mathrm{d}S_y \right|$$
$$\leq \sup_{\partial B_r(x)} |f(y) - f(x)| \to 0$$

cuando $r \to 0$, por la continuidad de f. Por lo tanto

$$(F_{\partial(\Omega)}f)(x) = (F_{\partial B_r(x)}f)(x) \to f(x)$$

cuando $r \to 0$. Como $F_{\partial(\Omega)}f)(x)$ no depende de r, se tiene lo afirmado. □

8.11. Proposición. Sean f_j $(j = 1, 2, \dots)$ monogénicas por la izquierda en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ supóngase que $f_j \to f$ cuando $j \to \infty$, uniformemente en cada compacto $K \subseteq \Omega$. Entonces f también es monogénica por la izquierda.

Demostración. Sea $x \in \Omega$. Tomar $r > 0$ tal que $\overline{B}_r(x) \subseteq \Omega$. Para cada n, $f_j(z) = F_{\partial B_r(x)}(f_j)(z)$ for $z \in B_r(x)$. Por hipótesis $f_j \to f$ uniformemente en el compacto $K = \partial B_r(x)$. Nótese que para $z \in B_{r/2}(x)$ y $y \in \partial B_r(x)$, tenemos $|y - z| \geq r/2$, luegoo

$$|E_n(y - z)| \leq \frac{1}{(r/2)^n}.$$

De esta cota,

$$\begin{aligned} |F_\Omega(f - f_j)(z)| &= \left| \int_{\partial B_r(x))} E_n(y - z)\vec{n}(y)\,(f(y) - f_j(y))\,\mathrm{d}S_y \right| \\ &\leq \frac{1}{(r/2)^n} \sup_{\partial B_r(x)} |f - f_j|(r^n \sigma_n) \\ &\to 0 \end{aligned}$$

cuando $j \to \infty$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} F_\Omega(f)(z) &= F_\Omega(f - f_n)(z) + F_\omega(f_n)(z) \\ &= F_\Omega(f - f_n)(z) + f_n(z) \\ &\to f(z) \end{aligned}$$

cuando $j \to \infty$. En otras palabras, $f(z) = F_\Omega(f)(z)$ para todo z en la vecindad $B_{r/2}(x)$ de x. Entonces f es monogénica por la izquierda en una vecindad de $x \in \Omega$ escogido arbitrariamente. Así f es monogénica por la izquierda en todo Ω. □

8.12. Proposición. (Fórmula de Cauchy para derivadas) Sea f monogénica por la izquierda en Ω. Entonces

$$\partial^{(k_0, \vec{k})} f(x) = (-1)^{k_0 + |\vec{k}|} \int_{\partial\Omega} \partial^{(k_0, \vec{k})} E_n(y - x)\vec{n}(y)\, f(y)\,\mathrm{d}S_y x$$

Corolario. Las funciones monogénicas son de clase C^∞. Las derivadas parciales de las funciones monogénicas son monogénicas.

Corolario. (Estimado de Cauchy) Sea f monogénica en $B_r(x_0)$. Entonces con $C_{\vec{k}}$ como arriba,

$$|\partial^{\vec{k}} f(x_0)| \leq \frac{\vec{k}!\, C_{\vec{k}}\, \sup |f|}{r^{|\vec{k}|}}.$$

8.13. "Serie de Taylor en $\mathcal{C}\ell(n)$"

Teorema. Sea $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, $r > 0$, y sea $f \colon B_r(a) \to \mathcal{C}\ell(n)$ monogénica por la izquierda. Entonces f se representa por una serie infinita en polinomios de Fueter, convergente en cada subdisco $B_{r'}(a)$, $0 < r' < r$. Explícitamente,

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{|\vec{k}|=m} \frac{1}{\vec{k}!} \mathcal{P}_k(x)\, \partial^{\vec{k}} f(0), \tag{1}$$

para cada $x \in B_r(a)$ y cada multiíndice no-negativo $\vec{k} \in \mathbb{Z}^n$. Los coeficientes son

$$\partial^{\vec{k}} f(0) = \int_{B_{r'}(0)} (\partial^{\vec{k}} E_n)\, \vec{n}\, f\, \mathrm{d}S \ \in\ \mathcal{C}\ell(n).$$

Demostración. Al considerar $f(x-a)$ en lugar de $f(x)$ suponemos sin perder generalidad que $a = 0$. Por la fórmula integral de Cauchy en la expansión uniformemente convergente,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{B_{r'}(0)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\vec{k}|=m}{}' \frac{(-1)^{|\vec{k}|}}{\vec{k}!} \mathcal{P}_k(x)\, (\partial^{\vec{k}} E_n)(y)\, \vec{n}(y)\, f(y)\, \mathrm{d}S_y \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\vec{k}|=m}{}' \frac{(-1)^{|\vec{k}|}}{\vec{k}!} \int_{B_{r'}(0)} \mathcal{P}_k(x)\, (\partial^{\vec{k}} E_n)(y)\, \vec{n}(y)\, f(y)\, \mathrm{d}S_y \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\vec{k}|=m}{}' \frac{(-1)^{|\vec{k}|}}{\vec{k}!} \mathcal{P}_k(x) \int_{B_{r'}(0)} (\partial^{\vec{k}} E_n)\, \vec{n}\, f\, \mathrm{d}S,
\end{aligned}$$

que converge uniformemente en $B_{r'}(0)$. El valor de la integral se obtiene aplicando otra vez la fórmula integral de Cauchy:

$$\begin{aligned}\partial^{\vec{k}} f(0) &= (\partial_x)^{\vec{k}}\big|_{x=0}\, f(x)\\ &= \int_{B_{r'}(0)} (\partial_x)^{\vec{k}}\big|_{x=0} E_n(y-x)\vec{n}(y) f(y)\,\mathrm{d}S_y\\ &= (-1)^{|\vec{k}|}\int_{B_{r'}(0)} (\partial^{\vec{k}} E_n)\,\vec{n}\,f\,\mathrm{d}S. \qquad\square\end{aligned}$$

Un cásco esférico, es decir, el dominio entre dos esferas concéntricas (análogo a un anillo), se denota por

$$\begin{aligned}B_{r_1,r_2}(a) &= \{x\in\mathbb{R}^{n+1}\colon\ r_1 < |x-a| < r_2\}\\ &= B_{r_2}(a)\setminus \overline{B}_{r_1}(a).\end{aligned}$$

Cuando f es monogénica por la izquierda en un dominio que contiene la clausura $\overline{B}_{r_1,r_2}(a)$, se tiene por el teorema integral de Cauchy que el valor de la integral

$$\int_{B_r(a)} E_n(y-x)\,\vec{n}(y)\,f(y)\,\mathrm{d}S_y$$

no depende del valor de r, siempre que $r_1 \le r \le r_2$. Esto es porque la frontera $\partial B_{r_1,r_2}(a)$ tiene dos partes, y

$$\vec{n}(y) = \frac{x}{|x|}$$

es el vector normal que apunta al exterior desde $y\in\partial B_{r_2}(a)$, mientras que $-\vec{n}(y)$ apunta al exterior desde $y\in\partial B_{r_1}(a)$.

8.14. “Serie de Laurent en $\mathcal{C}\ell(n)$”

Teorema. Sea $a\in\mathbb{R}^{n+1}$, $0<r_1<r2$, y sea $f\colon B_{r_1,r_2}(a)\to\mathcal{C}\ell(n)$ monogénica por la izquierda. Entonces f se representa por la suma de dos series infinitas que convergen uniformemente en cada subconjunto $\overline{B}_{r_1',r_2'}(a)$, donde $r_1<r_1'<r_2'<r$. Explícitamente,

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{|\vec{k}|=m} \mathcal{P}_{\vec{k}}(x)\,a_{\vec{k}} + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{|\vec{k}|=m} \partial^{\vec{k}}E_n(x)\,b_{\vec{k}}$$

para cada $x \in B_{r_2}(a) \setminus \overline{B}_{r_1}(a)$. Los coeficientes son

$$a_{\vec{k}} = \frac{1}{\vec{k}!} \int_{\partial B_{r_1'}(a)} \partial^{\vec{k}} E_n(y-a) \vec{n}(y)\, f(y)\, \mathrm{d}S_y,$$
$$b_{\vec{k}} = \int_{\partial B_{r_2'}(a)} \mathcal{P}_{\vec{k}}(x-a)\, \vec{n}(y)\, f(y)\, \mathrm{d}S_y.$$

Demostración. Trasladando la variable suponemos que $a = 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Sea $x \in B_{r_1,r_2}(0)$ arbitrario. Luego tomar radios r_1', r_2' tales que $r_1 < r_1' < |x| < r_2' < r_2$, i.e., $x \in B_{r_1',r_2'}(0)$ y $\overline{B}_{r_1',r_2'}(0) \subseteq B_{r_1,r_2}(0)$. Por la formula integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\partial B_{r_1,r_2}(0)} E_n(y-x)\, \vec{n}(y)\, f(y)\, \mathrm{d}S_y \\ &= \int_{\partial B_{r_2}(0)} E_n(y-x)\, \vec{n}(y)\, f(y)\, \mathrm{d}S_y - \int_{\partial B_{r_1}(0)} E_n(y-x)\, \vec{n}(y)\, f(y)\, \mathrm{d}S_y \end{aligned}$$

Como $|y| < |x|$ para $y \in \partial B_{r_2}(a)$, podemos sustituir la serie de Taylor para $E_n(y-x)$ en la primera integral. Como $|y| < |x|$ para $y \in \partial B_{r_1}(a)$, aplicamos la antisimetría del kernel de Cauchy,

$$E_n(y-x) = -E_n(x-y) = -\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{|\vec{k}|=m} \frac{1}{\vec{k}!} \mathcal{P}_{\vec{k}}(y)\, (\partial^{\vec{k}} E_n)(x)$$

y se llega a la conclusion. □

8.15. "Teorema de Runge en $\mathcal{C}\ell(n)$"

Teorema. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ abierto con complemento conexo. Sea f monogénica por la izquierda en Ω. Sea $K \subseteq \Omega$ un subconjunto compacto y sea $\epsilon > 0$. Entonces existe un polinomio monogénico por la izquierda p tal que

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon$$

para todo $x \in K$.

(Se omite la demostración.)

8.16. Sea $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una función con una singularidad en $x \in \partial\Omega$. La integral de *valor principal de Cauchy* sobre $\partial\Omega$ con singularidad en x se define como

$$\text{P.V.}\int_{\partial\Omega} g(y)\,\mathrm{d}S = \lim_{r\to 0}\int_{\partial\Omega\setminus B_r(x)} g(y)\,\mathrm{d}S$$

cuando este límite existe.

Lema. Sea $\partial\Omega$ suave. Entonces

$$\text{P.V.}\int_{\partial\Omega} E_n(y-x)\vec{n}\,dS_y = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ \frac{1}{2}, & x \in \partial\Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\overline{\Omega}. \end{cases}$$

(El "P.V." sólo es necesario en el caso de $x \in \partial\Omega$.)

Demostración. Para $x \in \Omega$, es simplemente la afirmación $(F_{\partial\Omega}1)(x) = 1$, la cual se sigue de la fórmula integral de Cauchy porque la función constante 1 en Ω es monogénica. La afirmación para $x \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\overline{\Omega}$ se verifica tomando R tan grande que $\overline{\Omega}\cup\{x\} \subseteq B_r(0)$, es decir $x \in B_R(0)\setminus\overline{\Omega}$, y ademas $|y-x|^n < \epsilon$ cuando $y \in \partial\Omega$ y $x \in \partial B_R(0)$ Luego aplicando el teorema de Cauchy a la función constante 1 en $\mathbb{B}_r(0)\setminus\Omega$,

$$(F_{\partial(\Omega-\overline{B_r(x)})}1)(x) = 0.$$

De esto $|(F_{\partial\Omega}1)(x)| < \epsilon$ con ϵ arbitrario.

Sea ahora $x \in \partial\Omega$. Puesto que para r pequeño,

$$\partial(\Omega\setminus\overline{B_r(x)}) = (\partial\Omega\setminus B_r(x)) \cup (\partial B_r(x)\cap\overline{\Omega})$$

y x es un punto exterior de $\Omega\setminus\overline{B_r(x)}$, por el caso anterior tenemos

$$(F_{\partial(\Omega-\overline{B_r(x)})}1)(x) = 0.$$

Este operador es la diferencia de dos integrales. Cuando $r \to 0$, la integral sobre $\partial\Omega\setminus B_r(x)$ tiende por definición al valor principal de Cauchy que nos interesa. La segunda integral es sobre $\partial B_r(x)\cap\overline{\Omega}$, que es aproximadamente una mitad de $\partial B_r(x)$, tiende a $(1/2)(F_{\partial B_r(x)}1)(x) = 1/2$. Juntando estos datos, tenemos

$$0 = \text{P.V.}\int_{\partial\Omega} E_n(y-x)\vec{n}\,dS_y - \frac{1}{2}$$

como se afirmaba. $\square$

8.17. La siguiente operación se aplica a funciones g definidas en $\partial\Omega$.

8.18. Límites no-tangenciales. Sea $x \in \Pi \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un hiperplano.

Definición. Un cono para Π con vértice en x es un conjunto de la forma $\{z\colon \text{áng}(z-x,\Pi) \geq c\}$ par alguna constante c, $0 < c < \pi/2$. (El cono tiene dos mitades, uno de cada lado de Π.)

El eje del cono es la recta por x en la dirección del vector normal $\pm\vec{n}(x)$. La condición puede expresarse como $\text{áng}(z-x,\vec{n}(x)) \leq \pi/2 - c$.

Lema. Para $y \in \Pi$ y z en un cono para Π con vértice en x, se tiene

$$\frac{|y-z|}{|y-x|} \geq c_1 \geq 0, \quad \frac{|z-x|}{|y-z|} \leq c_2.$$

Demostración. Sean $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ los ángulos interiores del triángulo con vértices en x, y, z. Por la ley de los senos,

$$\frac{|y-z|}{|y-x|} = \frac{\operatorname{sen}\theta_x}{\operatorname{sen}\theta_z}, \quad \frac{|z-x|}{|y-z|} = \frac{\operatorname{sen}\theta_y}{\operatorname{sen}\theta_x}.$$

Se sigue lo afirmado porque $\text{áng}(z-x,\Pi) \geq \theta_x$ junto con la observación $\operatorname{sen}\theta_y, \operatorname{sen}\theta_z < 1$. $\square$

Definición. El *límite no-tangencial* de una función $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ en $x \in \partial\Omega$,

$$\text{n.t.}\lim_{y\to x} f(y),$$

significa el limite de la restricción de f a la intersección de una vecindad de x con el cono basado en el plano tangente a $\partial\Omega$ en x. Se puede restringir f además al interior or extorior de Ω,

$$\text{n.t.}\lim_{\substack{y\to x\\ y\in\Omega}} f(y), \quad \text{n.t.}\lim_{\substack{y\to x\\ y\in\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}}} f(y).$$

(El límite no-tangencial puede existir aunque el límite normal no exista.)

8.19. Definición. El *operador de Sokhotski* para Ω es

$$(S_{\partial\Omega} g)(x) = 2\,\mathrm{P.V.}\int_{\partial\Omega} E_n(y-x)\,\vec{n}(y)\,g(y)\,\mathrm{d}S_y$$

para $x \in \partial\Omega$.

8.20. Teorema. (Fórmulas de Sokhotski, versión local) Sea $g\colon \Omega \to \mathcal{C}\ell(n)$. Supóngase que g es Hölder-continua en el punto $x \in \partial\Omega$, es decir $|g(y) - g(x)| \leq C|y-x|^p$ para algún $0 < p < 1$ y todo $y \in \partial\Omega$. Entonces

$$\mathrm{n.t.}\lim_{\substack{z\to x\\ z\in\Omega}} (F_{\partial\Omega} g)(z) = \frac{1}{2}((S_{\partial\Omega} g)(x) + g(x)),$$

$$\mathrm{n.t.}\lim_{\substack{z\to x\\ z\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\overline{\Omega}}} (F_{\partial\Omega} g)(z) = \frac{1}{2}((S_{\partial\Omega} g)(x) - g(x)),$$

(En algunos textos se llaman formulas de Plemelj.)

Demostración. Tomamos r tal que la intersección de un cono con $B_r(x)$ esté dentro de Ω, y también tan pequeño que los estimados

$$c_1|z-x| \leq |y-x| \leq c_2|y-z|,$$

los cuales se tienen para y en el plano tangente a $\partial\Omega$ en x, también valgan para $y \in \partial\Omega \cap B_r(x)$.

Por el estimado en $\big|\, a|b|^{n+1} - b\,|a|^{n+1}\,\big|$ con $a = y-x$, $b = y-z$ y los estimados para z en el cono,

$$|E_n(y-z) - E_n(y-x)| \leq \frac{1}{\sigma_n}|z-x|\frac{|y-z|^n + \sum_1^n |y-z|^j|y-x|^{n-j}}{|y-z|^n|y-x|^{n+1}}$$

$$\leq \frac{1}{\sigma_n}|z-x|\frac{|y-z|^n + \sum_1^n |y-z|^n c_2^{n-j}}{|y-z|^n c_1^n |y-z|^{n+1}} = \frac{c|z-x|}{|y-z|^{n+1}}.$$

$$= \frac{c|z-x|^{p/2}}{|y-z|^{n+1}|z-x|^{-(1-p/2)}} \leq \frac{c'|z-x|^{1-p/2}}{|y-z|^{n+p/2}}$$

al final porque $|z-x| \leq (c_2/c_1)|y-z|$. Introducimos la función

$$h(z) = \int_{\partial\Omega} E(y-z)\,\vec{n}(y)\,(g(y) - g(x))\,\mathrm{d}S_y.$$

Separamos la cantidad $h(z) - h(x)$ en en dos integrales, I_1 sobre $\partial\Omega \cap B_r(x)$, e I_2 sobre $\partial\Omega \setminus B_r(x)$. Para $y \in \partial\Omega \cap B_r(x)$, nuestro estimado junto con la hipótesis de la propiedad de Hölder para g muestra que el integrando de $h(z)$ es acotado por una constante por

$$|z - x|^{1-p/2} \frac{1}{|y - z|^{n-p/2}}$$

lo cual es integrable con respecto a y sobre la subvariedad n-dimensional $\partial\Omega \cap B_r(x)$ puesto que el exponente en el denominador es menor que n. Por lo tanto, I_1 es menor o igual a una constante por $|z - x|$. Para $y \in \partial\Omega \setminus B_r(x)$ tenemos $|y - z|, |y - x| > r$, luego $|E_n(y-z) - E_n(y-x)|$ es acotada y I_2 también es menor o igual a una constante por $|z - x|$. De lo anterior concluimos que $h(z) \to h(x)$ cuando $z \to x$ en el cono, sea desde dentro de Ω o desde el exterior.

Observemos que para $z \in \Omega$, por la definición del operador de Cauchy y la fórmula integral correspondiente,

$$h(z) = F_{\partial\Omega} g(z) - g(x),$$

mientras que por la definición del operador de Sokhotski y el valor del operador del Cauchy en la frontera,

$$h(x) = \frac{1}{2} S_{\partial\Omega} g(x) - \frac{1}{2} g(x).$$

Por lo tanto

$$\text{n.t.}\lim_{\substack{z \to x \\ z \in \Omega}} (F_{\partial\Omega} g)(z) = \text{n.t.}\lim_{\substack{z \to x \\ z \in \Omega}} h(z) + g(x) = \frac{1}{2} S_{\partial\Omega} g(x) + \frac{1}{2} g(x).$$

Por otra parte, para $z \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega$,

$$h(z) = F_{\partial\Omega} g(z),$$

lo cual da el valor deseado para $\text{n.t.}\lim (F_{\partial\Omega} g)(z)$ desde el exterior. $\square$

8.21. Teorema. (Fórmulas de Sokhotski, versión global) Sea $g \colon \Omega \to \mathcal{C}\ell(n)$. Supóngase que g satisface la condición de Hölder con el mismo exponente en cada $x \in \partial\Omega$. Entonces para todo $x \in \partial\Omega$,

$$\lim_{\substack{z \to x \\ z \in \Omega}} (F_{\partial\Omega} g)(y) = \frac{1}{2} (g(x) + (S_{\partial\Omega})(x)),$$

$$\lim_{\substack{z\to x\\ z\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\overline{\Omega}}} (F_{\partial\Omega}g)(z) = \frac{1}{2}(-g(x) + (S_{\partial\Omega})(x)),$$

que son límites de forma irrestricta, es decir, no se limitan a la aproximación no-tangencial.

Demostración. Denotamos $L(x)$ el límite no-tangencial de $F_{\partial\Omega}g(z)$ cuando $z\to x$ dentro de Ω, así $2L(x) = S_{\partial\Omega}g(x) + g(x)$. Observamos que se puede tomar un solo radio $r>0$ en el argumento anterior para todos los $x\in\partial\Omega$, y que los estimados que hicimos no dependen de x. Por eso el limite no-tangencial es uniforme:

$$|z-x|<\delta,\ z \text{ en el cono } \Rightarrow\ |F_{\partial\Omega g(z)} - \frac{1}{2}(S_{\partial\Omega g(z)} + g(x))| < \epsilon$$

donde δ no depende de x. Sea $x'\in\partial\Omega$ el punto más cercano a $z\in\Omega$. Entonces

$$|F_{\partial\Omega}g(z) - L(x)| \le |F_{\partial\Omega}g(z) - L(x')| + |L(x') - L(x)|.$$

Cuando $z\to x'$ en la dirección del vector normal, está dentro de cualquier cono, por lo que tendremos $|F_{\partial\Omega}g(z) - L(x')| < \epsilon/3$ cuando esté lo suficientemente cercano. Además

$$|L(x') - L(x)| \le \frac{1}{2}|S_{\partial\Omega}g(x') - S_{\partial\Omega}g(x)| + \frac{1}{2}|g(x') - g(x)|$$

y cada uno de los sumandos es menor que $\epsilon/3$ cuando $|x'-x|$ es pequeño, lo cual sucede cuando z está cercano a x. El último es por la condición de Hölder en g, y el primero puede verificarse por argumentos similares a los que ya hemos hecho. Por lo tanto $L(x)$ es el límite irrestricto de $F_{\partial\Omega}g(z)$. La convergencia desde el exterior se verifica de la misma manera. □

8.22. Corolario. Sea $g\colon \partial\Omega\to\mathcal{C}\ell(n)$ que satisface una condición de Hölder. Existe una función monogénica f en Ω con $f|_{\partial\Omega} = g$ si y sólo si $S_{\partial\Omega}g = g$. Existe una función monogénica f en $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\overline{\Omega}$ con $f|_{\partial\Omega} = g$ si y sólo si $S_{\partial\Omega}g = -g$.

Demostración. Supóngase que $f\colon\Omega\to\mathcal{C}\ell(n)$ es monogénica con valores g en la frontera. Aplicando la fórmula integral de Cauchy en la fórmula de Sokhotski tenemos los límites hacia la frontera

$$g = \lim f = \lim F_{\partial\Omega}g = \frac{1}{2}(S_{\partial\Omega}g + g)$$

lo cual implica $S_{\partial\Omega}g = g$. Recíprocamente, supongamos que $S_{\partial\Omega}g = g$. La función $f = F_{\partial\Omega}g$ es monogénica en Ω, y por la fórmula de Sokhotski

$$\text{lím} f = \frac{1}{2}(S_{\partial\Omega}g + g) = \frac{1}{2}(g + g) = g,$$

es decir $g = f|_{\partial\Omega}$. La afirmación para el exterior de Ω se demuestra de manera análoga. □

Corolario. $S^2_{\partial\Omega}g = g$.

Demostración. Escribamos L, L^* para los límites de $F_{\partial\Omega}$ en $\partial\Omega$ desde el interior y el exterior de Ω, respectivamente. Las fórmulas de Sokhotski dicen

$$L + L^* = \frac{1}{2}(S_{\partial\Omega}g + g) + \frac{1}{2}(S_{\partial\Omega}g - g) = S_{\partial\Omega}g.$$

Puesto que L, L^* son por construcción límites en la frontera de funciones monogénicas en el interior y el exterior respectivamente, por el corolario anterior $S_{\partial\Omega}L = L$, $S_{\partial\Omega}L^* = -L^*$. Por lo tanto

$$L - L^* = \frac{1}{2}(S^2_{\partial\Omega}g + S_{\partial\Omega}g) + \frac{1}{2}(S^2_{\partial\Omega}g - S_{\partial\Omega}g) = S^2_{\partial\Omega}g.$$

Pero las fórmulas de Sokhotski también dicen $L - L^* = g$. □

8.23. Definición. Las *proyecciones de Plemelj* $P^+_{\partial\Omega}$, $P^-_{\partial\Omega}$ son

$$P^{\pm}_{\partial\Omega} = \frac{1}{2}(I \pm S_{\partial\Omega}).$$

Corolario. $P^+_{\partial\Omega}$ es la proyección del espacio de funciones Hölder-continuas en $\partial\Omega$ sobre el subespacio de funciones que son valores frontera de una función monogénica en Ω. $P^-_{\partial\Omega}$ es la proyección a los valores frontera de funciones monogénicas en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega$. Estas projecciones son complementarias:

$$(P^+_{\partial\Omega})^2 = P^+_{\partial\Omega},\ (P^-_{\partial\Omega})^2 = P^-_{\partial\Omega},\ P^+_{\partial\Omega}P^-_{\partial\Omega} = P^-_{\partial\Omega}P^+_{\partial\Omega} = 0.$$

Corolario. Sea $f \in C(\Omega)$ tal que cada $x \in \Omega$ tiene una vecindad $V \subset \Omega$ con frontera suave tal que $F_{\partial V}f(y) = f(y)$ para todo $y \in V$. Entonces f es monogenica.