FUNCIONES HIPERHOLOMORFAS $\#4$

VOLUMEN EN $\mathbb{R}^d$

4.1. Para definir los operadores funcionales requeridos en el análisis de Clifford es necesario usar integrales. Queremos abordar la cuestión general de cómo integrar una función sobre una subvariedad k-dimensional $M^k \subseteq \mathbb{R}^d$. Definiremos "variedad" más adelante; mientras tanto observamos que hay tres casos fáciles: $k = 0$, $k = 1$, $k = d$. Un caso muy importante es $k = d - 1$ (por ejemplo, para el Teorema de Cauchy).

4.2. $\underline{k = 0.}$ Una subvariedad de dimensión 0 es una colección discreta de puntos; el volumen 0-dimensional es $\mathrm{vol}_0(\{\text{punto}\}) = 1$. La integral es la suma de los valores en los puntos.

4.3. $\underline{k = 1.}$ Una subvariedad de dimensión 1 es una curva; se puede parametrizar $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$. La definición de longitud es aplicable en cualquier espacio métrico,

$$\mathrm{vol}_1(\gamma) = \mathrm{long}(\gamma) = \sup \sum_{j=1}^{N} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)|$$

donde el sup se toma sobre todas las particiones $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ del intervalo $[0,1]$.

En términos del cálculo diferencial e integral, cuando γ es diferenciable se obtiene la longitud como una integral que es suma de aproximaciones lineales, $|\gamma(t+h) - \gamma(t)| \simeq |h\gamma'(t)|$ dando $h \sum_{j=1}^{d} |\gamma'(t_j)|$. El elemento infinitesimal se representa poniendo dt en lugar de h:

$$\mathrm{long}(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\, \mathrm{d}t.$$

El punto aquí es que podemos usar una fórmula explícita

$$\mathrm{vol}_1(v) = \big(\sum_{i=1}^{d} |v_i|^2\big)^{1/2}$$

para el volumen 1-dimensional (longitud) de un vector $v = (v_1, \ldots, v_d)$ en $\mathbb{R}^d$. Éste es el hecho que nos permite expresar la longitud como una integral.

Luego para integrar una función que está definida sobre la curva, se usa el valor de la función como un "peso" multiplicado por la longitud infinitesimal al integrar:

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_1 = \int_0^1 f(t)|\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

4.4. La curva parametrizada γ puede escribirse en coordenadas como $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_d(t))$. Su vector tangente es

$$\gamma(t) = (x_1'(t), \ldots, x_d'(t)).$$

La integral sobre γ con respecto a $\mathrm{d}x_i$ es

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}x_i = \int f(\gamma(t))x_i'(t) \, \mathrm{d}t.$$

Se puede decir que esta integral "no ve" el movimiento de γ in direcciones otras que x_i. Este tipo de integral tiene muchas aplicaciones, por ejemplo en el Teorema de Green en el plano,

$$\int_\omega \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} (f \, \mathrm{d}x + g \, \mathrm{d}y).$$

Otro ejemplo son las integrales de líneas complejas $\oint f(z) \, \mathrm{d}z$ de la variable compleja.

Cuando $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\varphi(s))$ es una reparametrización de γ (es decir, $t = \varphi(s)$ es una correspondencia diferenciable 1-a-1 con $\varphi'(s) > 0$), se tiene

$$\int_{\tilde{\gamma}} f|\,\mathrm{d}\gamma| = \int_\gamma f|\,\mathrm{d}\gamma|, \quad \int_{\tilde{\gamma}} f \, \mathrm{d}x_i = \int_\gamma f \, \mathrm{d}x_i.$$

Una <u>1-forma diferencial</u> es una combinación lineal

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^d a_i(x) \, \mathrm{d}x_i.$$

La integral de línea correspondiente es

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^d \int_\gamma a_i(x) \, \mathrm{d}x_i.$$

Daremos una definicíón más precisa de las formas diferenciales más adelante.

4.5. $\underline{k = d.}$ El d-volumen en $\mathbb{R}^d$ es simplemente la medida de Lebesgue.

No se necesita conocer mucha teoría de medida para entender la definicíon, pues se puede calcular el volumen por integrales de Riemann en los casos que nos interesan. El d-volumen en el sentido de Lebesgue se puede definir como sigue. Se supone que E es un abierto o cerrado en $\mathbb{R}^d$ y que E es acotado. El $\underline{d\text{-volumen}}$ de E es por definición

$$\mathrm{vol}_d(E) = \inf_{\{\{x^{(j)}, \vec{h}^{(j)}\}_N\}} \sum h_1^{(j)} \cdots h_d^{(j)}$$

tomando el inf sobre todas las formas de cubrir E por cualquier número N de d-rectángulos de lados arbitrarios $h^{(j)} > 0$ con esquina inferior en los puntos $x^{(j)}$:

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} (x^{(j)} + ([0, h_1] \times \cdots \times [0, h_d])).$$

En particular $\mathrm{vol}_d([0, h]^d)) = h^d$. Si E puede cubrirse por cubos de volumen total arbitrariamente pequeño, entonces E es de medida cero.

Para la integración, el elemento infinitesimal es $\mathrm{d}V = \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_d = \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_d$ que representa vol_d para un rectángulo d-dimensional infinitesimal $[0, dx_1] \times \cdots \times [0, dx_d]$ trasladado a una parte apropiada de E,

$$\mathrm{vol}_d\, E = \int_E \mathrm{d}V = \int_E \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_d$$

en el sentido de Riemann o de Lebesgue. Hay muchas notaciones,

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}V = \mathrm{d}V_x = \mathrm{d}V(x),$$

las últimas siendo útiles cuando entran otras variables más que x en la discusión.

4.6. Más sobre el volumen d-dimensional en $\mathbb{R}^d$. Es obvio que un traslado $E + a = \{x + a\colon\ x \in E\}$ tiene el mismo d-volumen,

$$\mathrm{vol}_d(E + a) = \mathrm{vol}_d\, E,$$

porque

$$\mathrm{vol}_d((x^{(j)} + [0, h]^d) + a) = h^d = \mathrm{vol}_d((x^{(j)} + [0, h]^d)).$$

Para aproximar subconjuntos que podrían apuntarse en cualquier dirección (como los paralelopípedos), primero veamos el volumen de un cuerpo rotado.

Teorema. Sea $R \in \mathrm{O}(d)$ un movimiento rígido de $\mathbb{R}^d$. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Entonces $\mathrm{vol}_d(R(E)) = \mathrm{vol}_d(E)$.

Demostración. Es suficiente demostrarlo para el caso particular $E = [0,1]^d$. Esto es porque de esto se seguirá también para $E = [0,h]^d$, y luego para un E general, cubierto por $x^{(j)} + [0,h]^d$ con precisión $\epsilon > 0$ se cubre cada $R(x^{(j)} + [0,h]^d) = Rx^{(j)} + R[0,h]^d$ por una colección $Rx^{(j)} + [0,h'_j]^d$ con precisión $\epsilon/2^j$ y se hace cuentas para verificar que el "error" $\mathrm{vol}_d(R(E)) - \mathrm{vol}_d(E)$ es arbitrariamente pequeño.

Además es suficiente demostrarlo para el caso particular

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cdots & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

porque todo elemento de $\mathrm{O}(n)$ es composición $R = R_1 \circ R_2 \cdots R_N$ de tales movimientos o similares. Para R como arriba, con la submatriz $R_0 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ en la esquina superior izquierdo, y que deja fijos todos los puntos de $\{0\}^2 \times [0,1]^{d-2}$, tenemos

$$R([0,1]^d) = R_0([0,1]\times[0,1]) \times [0,1]^{d-2}.$$

La afirmación se reduce a verificar

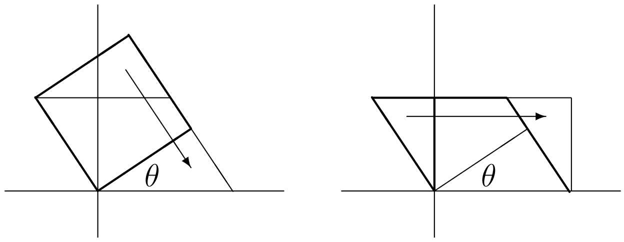
$$\mathrm{vol}_2(\ R_0([0,1]\times[0,1])\ ) = 1 = \mathrm{vol}_2([0,1]\times[0,1]) \qquad (*)$$

pues con esto, dado el paralelogramo $R_0([0,1]\times[0,1])$ cubierto con cuadrados traslados de $[0,h]^2$ con precisión ϵ, se forma el producto cartesiano de estos cuadrados con $[0,1]^{d-2}$ (o hacer capas de altura h) para formar d-rectángulos que cubren $R([0,1]^d)$ con precisión ϵ.

La afirmación $(*)$ es bien conocida pues R_0 es simplemente una rotación en un plano, pero de todas formas observamos cómo se puede verificar desde las definiciones. Tenemos

$$R_0([0,1]\times[0,1]) = P(v^1, v^2)$$

donde $v^1 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, $v^2 = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ y $P(v^1, v^2)$ es el paralelogramo con vértices $0, v^1, v^2, v^1 + v^2$. Cubrimos $P(v^1, v^2)$ por paralelogramos $(x_j, y_j) + [0, h]^2$. Movemos algunos de los cubitos para cubrir un paralelogramo con base $1/\cos\theta$ y altura $\cos\theta$, y luego movemos otros para cubrir un rectángulo con la mísma base y altura:



Así

$$\operatorname{vol}_2 P(v^1, v^2) = \frac{1}{\cos\theta} \cos\theta = 1 = \operatorname{vol}_2([0,1] \times [0,1]),$$

y queda verificado $(*)$. $\square$

4.7. El problema que nos interesa es el k-volumen dentro de $\mathbb{R}^d$. El primer punto es definirlo.

4.8. La definición de $\operatorname{vol}_k P(v^1, \ldots, v^k)$ para $P(v^1, \ldots, v^k) \subseteq \mathbb{R}^d$ es como sigue. Para poder aplicar la definición en un contexto un poco más general, sea $V^k \subseteq \mathbb{R}^d$ un subespacio lineal de dimensión k, y en lugar de $P(v^1, \ldots, v^k)$ consideremos $E \subseteq V^k$. Tomamos un movimiento rígido $R \in \mathrm{O}(d)$ de todo $\mathbb{R}^d$ tal que $R(V^k) \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\}^{d-k}$. (Para construirlo, tomar una base ortonormal de V^k, extenderla a una base ortonormal de $\mathbb{R}^d$, y luego R es la transformación lineal que envía esta base a la base canónica.) Definimos

$$\operatorname{vol}_k E \text{ en } \mathbb{R}^d = \operatorname{vol}_k R(E) \text{ en } \mathbb{R}^k.$$

En esta ecuación, $R(E)$ se refiere a la proyección de $R(E) \subseteq \mathbb{R}^d$ al primer factor $\mathbb{R}^k$; es decir, $\mathbb{R}^k$ "$=$" $\mathbb{R}^k \oplus \{0\}^{d-k}$. Para saber que vol_k está bien definido, sólo hay que verificar:

<u>Lema.</u> $\operatorname{vol}_k R(E)$ en $\mathbb{R}^k$ no depende de cuál movimiento $R \in \mathrm{O}(d)$ que se escogió: si $R_1, R_2 \in \mathrm{O}(d)$ satisfacen $R_j(V^k) \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\}^{d-k}$ $(j = 1, 2)$, entonces $\operatorname{vol}_k R_1(E) = \operatorname{vol}_k R_2(E)$ en $\mathbb{R}^k$.

<u>Demostración.</u> La composición $R_2 \circ R_1^{-1}$ es una transformación de $\mathbb{R}^d$ que deja invariante el primer factor $\mathbb{R}^k$, en el cual es una isometría

y se representa por un elemento de $\mathrm{O}(\mathbb{R}^k)$ (en efecto haciendo caso omiso del complemento $\mathbb{R}^{d-k}$). Por el Teorema, $R_2 \circ R_1^{-1}$ conserva el volumen k-dimensional en $\mathbb{R}^k$. $\square$

4.9. Ahora que $\mathrm{vol}_k\, P(v^1, \ldots, v^k)$ en $\mathbb{R}^d$ está definido, tenemos algo que se puede calcular.

Lema. Sea v^k ortogonal a $v^1, \ldots, v^{k-1}$ (todos los v^i en $\mathbb{R}^d$). Entonces

$$\mathrm{vol}_k(P(v^1, \ldots, v^k)) = |v^k| \,\mathrm{vol}_{k-1}\, P(v^1, \ldots, v^{k-1}),$$

donde ambos volúmenes se toman en $\mathbb{R}^d$.

Demostración. Escoger un $R_1 \in \mathrm{O}(d)$ que lleve $\langle v^1, \ldots, v^{k-1}\rangle$ a $\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\} \times \{0\}^{d-k}$. Por la ortogonalidad, $R_1(v^k) \in \{0\}^{k-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-k}$. Tomemos $R_2 \in \mathrm{O}(d)$ que deje invariante a $\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\} \times \{0\}^{d-k}$ y que lleve a $R_1(v^k)$ a $\{0\}^{k-1} \times \mathbb{R} \times \{0\}^{d-k}$. Así $R = R_2 \circ R_1$ satisface

$$\begin{aligned} R(v^i) &\in \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\} \times \{0\}^{d-k} \quad (1 \le i \le k-1), \\ R(v^k) &\in \{0\}^{k-1} \times \mathbb{R} \times \{0\}^{d-k}. \end{aligned}$$

Nuevamente, cubrir $R(P(v^1, \ldots, v^{k-1})$ con $k-1$-cubos y tomar su producto con pequeños intervalos en la k-ésima dirección para cubrir $R(P(v^1, \ldots, v^{k-1}, v^k)$. Finalmente, recordar que R conserva vol_k. $\square$

Corolario. Sea $\theta =$ ángulo entre v^k y el subespacio $\langle v^1, \ldots, v^{k-1}\rangle$. Entonces

$$\mathrm{vol}_k(P(v^1, \ldots, v^k)) = (|v^k| \operatorname{sen}\theta)\, \mathrm{vol}_{k-1}\, P(v^1, \ldots, v^{k-1}).$$

Demostración. Ahora la "altura" del paralelopípedo es $|v^k| \operatorname{sen}\theta$. $\square$

Ejercicio. Sea $V \subset \mathbb{R}^d$ un subespacio de dimensión $k-1$, donde $k \le d$. Sea $E \subseteq V$ cualquier subconjunto. Demostrar: $\mathrm{vol}_k(E) = 0$.

4.10. El producto cruzado de $d-1$ vectores en $\mathbb{R}^d$ se define como sigue: Cuando los vectores son linealmente dependientes, el producto cruzado es el vector $0 \in \mathbb{R}^d$. De otro modo, $v^1 \times \cdots \times v^{d-1}$ es el vector v^d tal que $v^d \perp \langle v^1, \ldots, v^d\rangle$, y que $|v^d| = \mathrm{vol}_{d-1}\, P(v^1, \ldots, v^{d-1})$, y con $v^1, \ldots, v^d$ orientados positivamente (es decir, con la misma orientación que la base canónica $\vec{\delta}_1, \ldots, \vec{\delta}_d$).

4.11. <u>Teorema.</u> Sean $v^1, \dots, v^d \in \mathbb{R}^d$. Entonces

$$\operatorname{vol}_d P(v^1, \dots, v^d) = |\det(v^1, \dots, v^d)|.$$

(Esto significa $|\det(v_j^i)|$.)

<u>Demostración.</u> Por inducción en $d \geq 1$. Para $d = 1$, $\operatorname{vol}_1(P(v^1)) = \operatorname{long}([0, v^1]) = |v^1| = |\det(v_1^1)|$. Con $d > 1$ vectores, nuevamente rotar de manera que $v^1, \dots, v^{d-1} \subseteq \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$. Tienen coordenadas

$$v^i = (v_1^i, \dots, v_{k-1}^i, 0) = (\overline{v^i}; 0), \quad \overline{v^i} \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

Dado que la rotación conserva el $(d-1)$-volumen, tenemos la siguiente relación entre volúmenes en $\mathbb{R}^d$ y en $\mathbb{R}^{d-1}$: $\operatorname{vol}_{d-1}(v^1, \dots, v^{d-1}) = \operatorname{vol}_{d-1}(\overline{v^1}, \dots, \overline{v^{d-1}}) = |\det(\overline{v^1}, \dots, \overline{v^{d-1}})|$ por hipótesis de inducción. Observemos que la última entrada v_d^d de v^d es la componente ortogonal a $v^1, \dots, v^{k-1}$. Por lo tanto el Lema nos dice

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}_n P(v^1, \dots, v^d) &\overset{\text{Lem}}{=} (|v^d| \operatorname{sen}\theta) \operatorname{vol}_{n-1} P(v^1, \dots, v^{d-1}) \\
&\overset{\text{ind}}{=} (|v^d| \operatorname{sen}\theta)\, |\det(\overline{v^1}, \dots, \overline{v^{d-1}})| \\
&= |v_d^d|\, |\det(\overline{v^1}, \dots, \overline{v^{d-1}})| \\
&= |\det(v^1, \dots, v^d)|.
\end{aligned}$$

La última igualdad viene de expansion por la última columna en

$$\begin{vmatrix}
v_1^1 & v_2^1 & \dots & v_{d-1}^1 & 0 \\
v_1^2 & v_2^2 & \dots & v_{d-1}^2 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\
v_1^{d-1} & v_2^{n-1} & \dots & v_{d-1}^{d-1} & 0 \\
v_1^d & v_1^d & \dots & v_{d-1}^d & v_d^d
\end{vmatrix}.$$

□

4.12. <u>Corolario.</u> Sea $E \subset \mathbb{R}^d$, $f \colon E \to \mathbb{R}^d$ differenciable. Entonces

$$\operatorname{vol}_d(f(E)) = \int_E \det |J_f(x)| \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_d$$

donde $J_f(x)$ es la matriz Jacobiana de f en el punto $x \in E$.

¿Se podría haber deducido esta fórmula de cambio de variable de integral sin haber hecho el análisis geométrico del volumen de la imagén del paralepípedo infinitesimal $[0,\, \mathrm{d}x_1] \times \cdots \times [0,\, \mathrm{d}x_d]$ bajo la transformación lineal $J_f|_x$?

FUNCIONES HIPERHOLOMORFAS $\#5$

FORMAS DIFERENCIALES

5.1. Sean $v^1, \cdots, v^k \in \mathbb{R}^d$. El producto exterior $v^1 \wedge \cdots \wedge v^k$ es una expresión equivalente a otro producto $\pm\tilde{v}^1 \wedge \cdots \wedge \tilde{v}^k$ cuando

$$\begin{aligned} \mathrm{Span}(\{v^1, \ldots, v^k\}) &= \mathrm{Span}(\{\tilde{v}^1, \ldots, \tilde{v}^k\}) \text{ y además} \\ \mathrm{vol}_k\, P(v^1, \ldots, v^k) &= \mathrm{vol}_k\, P(\tilde{v}^1, \ldots, \tilde{v}^k). \end{aligned}$$

El signo es "+" cuando la orientación es igual, de otro modo es "−". (La noción de orientación requiere que sean linealmente independientes)

Claramente $v^1 \wedge \cdots \wedge (rv^i) \cdots \wedge v^k = rv^1 \wedge \cdots \wedge v^i \cdots \wedge v^k$, $v^1 \wedge v^2 = -v^2 \wedge v^1$. Esta última regla implica $v^i \wedge v^i = 0$. Los productos exteriores de los vectores canónicos $\vec{\delta}_1, \ldots, \vec{\delta}_d$ generan un álgebra similar a la de Clifford salvo por los valores de los cuadrados; se llama el "álgebra exterior". Veamos los detalles en el contexto de las diferenciales.

5.2. Formas diferenciales. Antes de investigar cómo definir integración en conjuntos de dimensión k con $1 < k < d$, damos las propiedades principales de las formas diferenciales.

Una k-forma básica en $\mathbb{R}^d$ es un producto exterior de k diferenciales,

$$\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

con $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Para cada punto dado $x \in \mathbb{R}^d$, se forma un álgebra sobre $\mathbb{R}$ generada por la "0-forma" igual a 1 (es decir el conjunto $\{i_1, \ldots, i_d\}$ es vacío) y las 1-formas $\mathrm{d}x_1,\, \mathrm{d}x_2, \ldots,\, \mathrm{d}x_d$ (es decir $\{i_1, \ldots, i_d\}$ tiene un solo elemento), de manera análoga a la definición de las álgebras de Clifford, pero con la regla de multiplicación

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\,\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$$

para todo i, j (no sólo para $i \neq j$). Las otras reglas son naturales,

$$(r_1 + r_2)\omega = r_1\omega + r_2\omega, \quad (r\omega_1) \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge (r\omega_2), \quad 1 \wedge \omega = \omega,$$

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 + \tilde{\omega}_2) = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \tilde{\omega}_2,$$

etc. Por la asimetría de la multiplicación, $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0$, y en consecuencia toda k-forma básica con $k > d$ vale cero. Una forma diferencial general "puntual" es una combinación lineal de k-formas básicas

$$\omega = \sum_{A \in 2^n} a_A \, \mathrm{d}x_A$$

con $a_A \in \mathbb{R}$ y en donde se usa la notación

$$\mathrm{d}x_A = \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

cuando $A = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ con $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Sin embargo, comúnmente no hace mucha falta considerar formas de grado mixto, sino que nos limitamos a las k-formas, en las cuales los A en la suma tienen una misma cardinalidad $|A| = k$, que es el grado de la forma.

5.3. Un vector tangente es un operador lineal $\mathbb{R}$-valuado en el espacio de vectores. Dada f definida en una vecidad de $x \in \mathbb{R}^d$, entonces f define un vector cotangente llamado $\mathrm{d}f|_x$ por medio de la derivación direccional,

$$\mathrm{d}f|_x(v) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(x + tv).$$

Un ejemplo especial es cuando $f(x) = x_i$, que escribimos "$f = x_i$", la función que selecciona de un vector $v^j = \sum_i v_i^j \vec{\delta}_i$ su i-ésima coordenada. Como $x_i(x + tv) = x_i + tv_i$, tenemos

$$\mathrm{d}x_i(v) = v_i.$$

El valor de una k-diferencial aplicada a una lista ordenada de k vectores $v^1, v^2, \ldots, v^k$ es

$$(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k})(v^1, v^2, \ldots, v^k) = \sum_{\pi} (\operatorname{sgn} \pi) v_{i_1}^{\pi(1)} v_{i_2}^{\pi(2)} \cdots v_{i_k}^{\pi(k)} \in \mathbb{R}.$$

Para cada j, se considera a $v^j = (v_1^j, \ldots, v_d^j)$ como un vector columna, y la sumatoria es sobre $\pi \in \mathrm{Perm}(k)$.

Cada v_j^j es el valor de la aplicación de $\mathrm{d}x_i$ a v^j. Por lo tanto, una 1-diferencial es lo mismo que un vector cotangente.

Ejemplo de una 2-diferencial: $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ aplicada a (v^1, v^2) da

$$(\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2)(v^1, v^2) = v_1^1 v_2^2 - v_1^2 v_2^1.$$

Proposición. La acción de una k-differencial en una lista de vectores es lineal en cada vector por separado ("multilineal").

Corolario. $(\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_d)(v^1, \ldots, v^d) = \det(v_i^j)_{i,j}$.

Corolario. Sea ω una d-diferencial en $\mathbb{R}^d$. Sea $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Entonces

$$\omega(Av^1, \ldots, Av^d) = (\det A)\, \omega(v^1, \ldots v^d).$$

5.4. Finalmente, una k-forma diferencial definida sobre un subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es simplemente una funcion que asocia una k-forma a cada punto de E:

$$\omega(x) = \sum_{|A|=k} a_A(x)\, \mathrm{d}x_A.$$

De acuerdo con las características de las funciones coeficientes a_A se puede decir si ω es continua, diferenciable, etc.

Decimos que $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ es el elemento de área (o volumen 2-dimensional) en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio. $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$ es el elemento de área en $\mathbb{R}^3$.

5.5. La acción de las k-diferenciales sobre las listas de k vectores es lineal en cada variable:

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k})(v^1, v^2, \ldots, rv^j + \tilde{r}\tilde{v}^j, \ldots, v^k) = \\ r(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k})(v^1, v^2, \ldots, v^j, \ldots, v^k) \\ +\ \tilde{r}(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k})(v^1, v^2, \ldots, \tilde{v}^j, \ldots, v^k).\end{aligned}$$

Ejercicio. Dadas formas ω, ω' de grados k, k',

$$(\omega \wedge \omega')(v^1, \ldots, v^{p+p'}) =$$

$$\frac{1}{p!p'!} \sum_{\sigma\in \mathrm{Perm}(p+p')} \omega(v^{\sigma(1)}, \cdots, v^{\sigma(p)})\, \omega'(v^{\sigma(p+1)}, \cdots, v^{\sigma(p+p')})$$

5.6. Una función $F\colon \Omega_1 \to \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^d$, con $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^d$, transfiere formas en Ω_2 en formas en Ω_1 (pullback). El ejemplo más sencillo es para 0-formas,

$$F^*(a) = a \circ F.$$

expresando F en coordenadas como $F = (F_1, \dots, F_d)$. De esto

$$F^*(x_i) = F_i.$$

En general, para una k-forma en Ω_2,

$$(F^*\omega)(v^1, \dots, v^k) = \omega(F_* v^1, \dots, F_* v^k),$$

donde el vector $F_* v$ (ahora con el asterisco abajo) se define como

$$F_* v = J_f v$$

y $J_f \in \mathbb{R}^{d\times d}$ es la matriz jacobiana de F,

$$J_f = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}.$$

Además

$$F^*(dx_i) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x_j = \mathrm{d}F_i = d(F^* x_i).$$

Si $G\colon \Omega_2 \to \Omega_3$, entonces

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$$

(aunque $(G \circ F)_* = F_* \circ G_*$).

5.7. Proposición. $F^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = F^*(\omega_1) \wedge F^*(\omega_2)$.

FUNCIONES HIPERHOLOMORFAS #6

INTEGRACIÓN

Ahora daremos una definición de integral que abarcará los subespacios de dimensión intermedia.

6.1. Una subvariedad de dimensión k en $\mathbb{R}^d$ es un subconjunto $E = M = M^k \subset \mathbb{R}^d$ (típicamente conexo) que es la unión de pedazos que pueden ser parametrizados individualmente por k variables reales:

$$x = x(t_1, \dots, t_k) = (x_1(t), \dots, x_d(t)) \in M^k$$

Se requiere que la correspondencia $t \leftrightarrow x$ sea un difeormofismo en el sentido de que es diferenciable, 1-a-1 y que para cada valor de t las derivadas parciales $\frac{\partial x}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial t_k}$ son vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^d$.) Se puede manejar los "pedazos" de diversas maneras. A menudo se supone que son abiertos, pero entonces para usarlos a definir integrales se tiene que tomar en cuenta los lugares donde se traslapen. Aquí supondremos que M es compacto y hay un número finito de pedazos, que son cerrados en M con sus interiores (en la topología relativa) disjuntos, y la intersección de cualesquier dos pedazos es de k-volumen cero. Con esta última condición podremos definir una integral en M como la suma de las integrales sobre los pedazos.

Así una curva γ es una subvariedad de dimensión 1.

Ejemplo. Un ejemplo de una subvariedad de dimensión $k = d-1$ (es común decir "de codimensión 1") es la n-esfera

$$S^n = \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}: \ |x| = 1\}$$

en $\mathbb{R}^{n+1}$, es decir $d = n+1$. Podemos usar dos pedazos, $S^n = E^+ \cup E^-$,

$$E^+ = \{x \in S^n: \ x_0 \geq 0\}, \quad E^- = \{x \in S^n: \ x_0 \leq 0\}.$$

La intersección es el ecuador $S^{n-1} = \{x \in S^n: \ x_0 = 0\}$ y como $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{d-1}$, sabemos que $\mathrm{vol}_n(S^{n-1}) = 0$. Luego definimos las dos funciones parametrizadoras

$$\varphi^+(t_1, \ldots, t_n) = ((1 - \sum_{i=1}^n t_i^2)^{-1/2}, \ t_1, \ \ldots, \ t_n),$$
$$\varphi^-(t_1, \ldots, t_n) = (-(1 - \sum_{i=1}^n t_i^2)^{-1/2}, \ t_1, \ \ldots, \ t_n),$$

En $E^\pm$ tomamos $x = \varphi^\pm(t)$.

6.2. Para facilitar la definición de integral supondremos que $M \subseteq \mathbb{R}^d$ se forma de un solo tal pedazo y que $t = (t_1, \ldots, t_k)$ varía dentro de un rectánguloide $[0, h_1] \times \cdots [0, h_k] \subseteq \mathbb{R}^k$.

Los vectores tangentes a M correspondientes a la parametrización son

$$\frac{\partial x}{\partial t_1} = (\frac{\partial x_1}{\partial t_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial x_d}{\partial t_1}),$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial x}{\partial t_k} = (\frac{\partial x_1}{\partial t_k}, \ \ldots, \ \frac{\partial x_d}{\partial t_k}).$$

Así $(\partial x/\partial t_i)|_t \in \mathbb{R}^d$.

Definición. Sea ω una k-forma definida en $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces la integral de ω es

$$\int_M \omega \ = \ \int_{t_k} \cdots \int_{t_1} \omega|_{x(t)} \left(\frac{\partial x}{\partial t_1}|_t, \ldots, \frac{\partial x}{\partial t_k}|_t \right) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_k.$$

Una forma de entender la definición de $\int_M \omega$ es que se forman paralelepípedos infinitesimales k-dimensionales $P(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\Delta t_1|_t, \ldots, \frac{\partial x_d}{\partial t_k}\Delta t_k|_t)$ dadas por la parametrización, que son buenas aproximaciones de M localmente. Luego se integran las partes de estos paralelepípedos que la k-forma ω "sí ve".

Los desplazamientos escalares Δt_i se factorizan por la multilinealidad:

$$\omega(\frac{\partial x}{\partial t_1}\Delta t_1, \ldots, \frac{\partial x}{\partial t_k}\Delta t_k) = \omega(\frac{\partial x}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial t_k})\Delta t_1 \ldots \Delta t_k$$

lo cual da el integrando a nivel infinitesimal.

6.3. El valor de la integral no depende de la parametrización, hablaremos de esto más tarde.

El volumen k-dimensional de la subvariedad M se obtiene integrando la k-forma de volumen para M, ω_M, definida por

$$\omega_M(\mathrm{d}v^1, \ldots, \mathrm{d}v^k) = \pm \operatorname{vol}_k(\mathrm{d}v^1, \ldots, \mathrm{d}v^k)$$

donde el signo $\pm$ es el signo de la orientación del movimiento rígido con que se lleva $\langle v^1, \ldots, v^k \rangle$ a $\mathbb{R}^k \times \{0\}^{d-k}$ con la parametrización que se aplica para calcular la integral. Esta ambigüedad de signo es la razón que se puede definir la integral solamente sobre las variedades orientadas, es decir que todas las parametrizaciones

$x(t_1, \ldots, t_k)$ tienen que ser compatibles en el sentido de la orientación, en los puntos comunes de distintos sistemas de coordenadas: la composición de una parametrización con la inversa de otra, donde esté definida, tiene que ser una transformación de vectores $t \in \mathbb{R}^k$ que preserve la orientación.

En subvariedades de dimension 2 y 3 en $\mathbb{R}^3$ escribimos

$$\mathrm{d}S = \mathrm{dvol}_2, \quad \mathrm{d}V = \mathrm{dvol}_3\,.$$

Para dimensión 1 la longitud de arco a veces es $\mathrm{d}s = \mathrm{dvol}_1$. También escribimos $\mathrm{d}S = \mathrm{dvol}_{d-1}$, $\mathrm{d}V = \mathrm{dvol}_d$,

6.4. Se integra una función sobre M "con respecto al volumen k-dimensional" (o longitud, área de superficie, ...), multiplicando la forma de volumen por la funcion:

$$\pm \int_M f \,\mathrm{dvol}_k \;=\; \int_M f\,\omega_M.$$

Así el volumen de M se obtiene con $f \equiv 1$. Se puede obtener por reducción Gaussiana y tomando un determinante.

6.5. El hecho de que vol_0, vol_1 y vol_n fueran los k-volúmenes "más fáciles" en $\mathbb{R}^d$ corresponde a que las 0-formas, las 1-formas y las n-formas sean las más sencillas. Entre las dimensiones restantes, veremos que las $d-1$ formas siguen en grado de complejidad.

6.6. La <u>diferencial</u> $\mathrm{d}\omega$ de una k-forma diferencial ω es una $(k+1)$-forma definida como sigue. La diferencial de una 0-forma, que es simplemente una función f, es la 1-forma

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i.$$

Para $k \geq 2$, $\mathrm{d}\omega$ está determinada por la regla

$$\mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\,\mathrm{d}\omega_1 \wedge \omega_2) + (-1)^{k_1}\omega_1 \wedge \mathrm{d}\omega_2$$

donde ω_1 es una k_1-forma. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(a\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2) &= \mathrm{d}a \wedge (\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2) + a(\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}x_1) \wedge \mathrm{d}x_2 - a\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}\,\mathrm{d}x_2 \\
&= \mathrm{d}a \wedge (\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial a}{\partial x_i} \wedge \mathrm{d}x_i\Big)(\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2) \\
&= \sum_{i=3}^{d} \frac{\partial a}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \\
&= \sum_{i=3}^{d} \frac{\partial a}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_i.
\end{aligned}$$

(Si $d = 2$ entonces el resultado es 0.)

Más generalmente,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(a\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}) = \\
&\qquad \sum_{i \notin \{i_j\}} \big((-1)^{\#\{i_j:\ i_j<i\}}\frac{\partial a}{\partial x_i}\big)\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_i \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}.
\end{aligned}$$

o en forma más compacta (suponiendo $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$),

$$\mathrm{d}(a\,\mathrm{d}x_A) = \sum_{i \notin A} \big((-1)^{\#\{j\in A:\ j<i\}}\frac{\partial a}{\partial x_i}\big)\,\mathrm{d}x_{A\cup\{i\}}.$$

Con esto se puede calcular d aplicado a cualquier forma diferencial expresada en términos de formas básicas. Pensando en x_i como la función que envía x a la i-ésima coordenada x_i, tenemos $\mathrm{d}(x_i) = \mathrm{d}x_i$.

Ejercicio. Para cualquier forma diferencial ω, $\mathrm{d}\mathrm{d}\omega = 0$.

Proposición. $F^*\,\mathrm{d} = \mathrm{d}F^*$.

Demostración. Primero consideramos una 0-forma a:

$$\begin{aligned}
d(F^*a) = d(a\circ F) &= \sum_j \frac{\partial(a\circ F)}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j = \sum_j\sum_i \Big((\frac{\partial a}{\partial x_i}\circ F)\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\Big)\,\mathrm{d}x_j \\
&= \sum_i (\frac{\partial a}{\partial x_j}\circ F)\sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j = \sum_i (\frac{\partial a}{\partial x_j}\circ F)\,\mathrm{d}F_i \\
&= \sum_i F^*(\frac{\partial a}{\partial x_i})F^*(\mathrm{d}x_i) = F^*\sum_i \frac{\partial a}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_i \\
&= F^*(\mathrm{d}a).
\end{aligned}$$

Antes lo probamos también para 1-formas básicas, $F^*(\,\mathrm{d}x_i) = d(F^*x_i)$. Ahora supongamos inductivamente que el resultado es cierto para todas las formas ω de grado k. Cualquier forma diferencial de grado $k+1$ es suma de formas como $\mathrm{d}x_i\wedge\omega$, y

$$\begin{aligned}
F^*(\mathrm{d}(\mathrm{d}x_i\wedge\omega)) &= F^*(\mathrm{dd}x_i\wedge\omega - \mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}\omega)) = -F^*(\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}\omega) \\
&= -F^*(\mathrm{d}x_i)\wedge F^*(\mathrm{d}\omega) = -\,\mathrm{d}(F^*x_i)\wedge\mathrm{d}(F^*\omega) \\
&= \mathrm{dd}(F^*x_i)\wedge F^*\omega - \mathrm{d}(F^*x_i)\wedge\mathrm{d}(F^*\omega) \\
&= \mathrm{d}(\mathrm{d}F^*x_i\wedge F^*\omega) \\
&= \mathrm{d}(F^*(\mathrm{d}x_i)\wedge F^*(\omega)) \\
&= \mathrm{d}(F^*(\mathrm{d}x_i\wedge\omega)).
\end{aligned}$$

Para formas generales el resultado sale del hecho para las formas básicas. $\square$

6.7. La operación F^* es importante porque cuando $\tilde{x}$ es una reparametrizacion de x, es decir, $\tilde{x} = x\circ\varphi$ donde $\varphi\colon (s_1,\dots,s_k)\mapsto(t_1,\dots,t_k)$ es 1-a-1 y diferenciable, entonces

$$\mathrm{d}\tilde{x} = \varphi^*(\mathrm{d}x).$$

(En algunas técnicas del cálculo se escribe $\mathrm{d}\tilde{x} = \mathrm{d}x$.) Con base en este hecho se verifica que $\int_M\omega$ *no depende de la parametrización de* M.

FUNCIONES HIPERHOLOMORFAS #7

TEOREMA DE STOKES Y CONSECUENCIAS

7.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un abierto acotado, cuya frontera $\partial\Omega$ es una $(d-1)$-variedad diferenciable (o una unión finita de $(d-1)$-variedades, pueden ser diferenciables por pedazos). (No habrá confusión al usar el mismo símbolo ∂ tanto para el operador de Fueter como para la frontera, por aparecer en contextos distintos.) Sea ω una $(d-1)$-forma diferenciable en Ω que se extiende continuamente a la frontera. Pongamos la orientación en $\partial\Omega$ para la cual el vector normal

$$\frac{\partial x}{\partial t_1} \times \cdots \times \frac{\partial x}{\partial t_{d-1}}$$

apunta hacia afuera de Ω. El Teorema de Stokes dice que

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} \mathrm{d}\omega.$$

No es necesario que $\partial\Omega$ sea conexo. (El Teorema también es válido para k-variedades y $(k-1)$-formas en $\mathbb{R}^d$ para $k < d$, pero no necesitaremos este hecho.)

Específicamente, con la notación

$$\mathrm{d}\widehat{x}_i = \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_d$$

("$\mathrm{d}V$ con el factor $\mathrm{d}x_i$ omitido"), podemos expresar cualquier $(d-1)$-forma como

$$\omega = \sum_1^d f_i \, \mathrm{d}\widehat{x}_i,$$

(es conveniente escribir f_i y no $f_{123\cdots\widehat{i}\cdots d}$) y su diferencial es la d-forma

$$\mathrm{d}\omega = F\,\mathrm{d}V \tag{$*$}$$

donde $F = \sum_{i=1}^d (-1)^{i-1} \, (\partial f_i / \partial x_i)$.

7.2. Bosquejo de la demostsración. Nos interesan lase $(d-1)$-formas $\mathrm{d}\widehat{x}_i$. Notamos

$$\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}\widehat{x}_i = \begin{cases} (-1)^{i-1} \, \mathrm{dvol}_d, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{1}$$

<u>Lema.</u> Sea ω una $(d-1)$-forma en $E = [0,1]^d \subseteq \mathbb{R}^3$. Entonces

$$\int_{\partial E} \omega = \int_E \mathrm{d}\omega.$$

Demostración. La frontera ∂E se formas de pares de caras $(d-1)$-dimensionales opuestas $S_i^{\pm}$, ortogonales a los vectores básicos canónicos $\vec{\delta}_i$.

$$\begin{aligned} S_i^- &= \{(t_1,\ \ldots,\ t_{i-1},\ 0,\ t_{i+1},\ \ldots,\ t_d\}, \\ S_i^+ &= \{(t_1,\ \ldots,\ t_{i-1},\ 1,\ t_{i+1},\ \ldots,\ t_d\}, \end{aligned}$$

con $0 \leq t_j \leq 1$, luego

$$\partial E = \bigcup_{i=1}^{d} (S_i^- \cup S_i^+).$$

Damos orientaciones opuestas en $S_i^{\pm}$ con vectores normales hacia afuera de E. Las dos parametrizaciones

$$\mathbb{R}^{d-1} \supseteq \{(t_1,\ \ldots,\ t_{i-1},\ t_{i_1},\ \ldots,\ t_d)\} \to S_i^{\pm}$$

difieren entre sí por una reflexion en un plano que bisecta E. Esto implica que en la integración,

$$\int_{\partial E} \omega = \sum_{i=1}^{d} (-1)^i \Big(\int_{S_i^+} \omega - \int_{S_i^-} \omega \Big).$$

Fijemos i. Por la definición de integral,

$$\begin{aligned} \int_E \mathrm{d}(f_i \, \mathrm{d}\widehat{x}_i) &= \int_E \sum_{j=1}^{d} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}\widehat{x}_i \\ &= \int \cdots \int \int \sum_{j=1}^{d} (-1)^{i-1} \Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x(t)) \Big) \Big((\, \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}\widehat{x}_i)(\frac{\partial x}{\partial t_1}, \ldots \frac{\partial x}{\partial t_d}) \Big) \, \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_d \\ &= (-1)^{i-1} \int \cdots \int \int \Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x(t)) \Big) \Big((\, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}\widehat{x}_i)(\frac{\partial x}{\partial t_1}, \ldots \frac{\partial x}{\partial t_d}) \Big) \, \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_d, \end{aligned}$$

en la última igualdad omitimos los términos para $j \neq i$ pues son 0. Para evaluar el producto exterior, notemos que para el cubo, $\partial x / \partial t_j$ siempre es o biens 0 o bien algún $\vec{\delta}_k$, luego

$$\mathrm{d}x_i(\frac{\partial x}{\partial t_{\pi(1)}}) \ \mathrm{d}x_1(\frac{\partial x}{\partial t_{\pi(2)}}) \ \cdots \ \mathrm{d}x_{i-1}(\frac{\partial x}{\partial t_{\pi(i)}}) \ \mathrm{d}x_{i+1}(\frac{\partial x}{\partial t_{\pi(i+1)}}) \ \cdots \ \mathrm{d}x_d(\frac{\partial x}{\partial t_{\pi(d)}})$$

es cero para cada permutación $\pi \in \mathrm{Perm}(d)$ salvo por la que lleva $(1, 2, \ldots, d)$ a $(i, 1, 2, \ldots, i-1, i+2, \ldots, d)$. Por lo tanto, todos los sumandos en el producto exterior se anulan salvo uno, y ese sumando contiene el signo $(-1)^{i-1}$, que cancela el signo en las integrales calculadas previamente. Esto deja

$$\int_E \mathrm{d}(f_i\,\mathrm{d}\widehat{x}_i) = \int \cdots \int \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x(t))\;\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_d.$$

Despejamos la integral sobre el intervalo $0 \leq t_i \leq 1$, y la evaluamos con el Teorema Fundamental del Cálculo, tomando en cuenta las orientaciones en las caras opuestas:

$$\begin{aligned}
\int_E \mathrm{d}(f_i\,\mathrm{d}\widehat{x}_i) &= \int \cdots \int \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x(t))\,\mathrm{d}t_i\right)\;\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_{i-1}\,\mathrm{d}t_{i+1} \cdots \mathrm{d}t_d \\
&= \int \cdots \int \big(f_i(x(t_1, \ldots, 1, \ldots, t_k)) \\
&\qquad\qquad - (f_i(x(t_1, \ldots, 0, \ldots, t_k))\big)\;\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_{i-1}\,\mathrm{d}t_{i+1} \cdots \mathrm{d}t_d \\
&= (-1)^i \left(\int_{S_i^+} f_i\,\mathrm{d}\widehat{x}_j - \int_{S_i^-} f_i\,\mathrm{d}\widehat{x}_j\right) \\
&= \int_{\partial E} f_i\,\mathrm{d}\widehat{x}_i,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene porque $\int_{S_j^\pm} f_i\,\mathrm{d}\widehat{x}_j = 0$ cuandon $i \neq j$. Finalmente, puesto que la $(d-1)$-forma ω puede expresarse como suma de d formas básicas, sumamos las igualdades para obtener

$$\int_E \mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^d \int_E \mathrm{d}(f_i\,\mathrm{d}\widehat{x}_i) = \sum_{i=1}^d \int_{\partial E} f_i\,\mathrm{d}\widehat{x}_i = \int_{\partial E} \omega. \qquad \square$$

7.3. Indicamos como se podría completar la demostración del Teorema de Stokes con el Lema. Supongamos primero que M se parametriza como una sola pieza, $x\colon E \to M$. Traemos las formas diferenciales al espacio de parámetros E mediante la parametrización x y aplicamos la regla“$F^*\,\mathrm{d} = \mathrm{d}F^*$” tanto en el interior como sobre la frontera:

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_E x^*(d\omega) = \int_E d(x^*(\omega)) = \int_{\partial E} x^*(\omega) = \int_{\partial M} \omega.$$

Cuando M se forma de varias piezad parametrizadas, las integrales sobre las partes comunes de la frontera se cancelarán, dejando la integral sobre la frontera. En cambio, las integrales sobre los interiores de las piezas sumarán a la integral sobre M.

7.4. Forma diferencial de volumen de codimensión 1 con valores en paravectores.

Ahora trabajaremos en dimensión $d = n + 1$.

El motivo principal de haber hablado de volúmenes y de formas diferenciales es para la siguiente construcción. Introducimos la siguiente n-forma diferencial paravector-valuada en $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathcal{C}\ell(n)$,

$$\omega_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \,\mathrm{d}\widehat{x}_i \, e_i$$

donde $\mathrm{d}\widehat{x}_i = \mathrm{d}x_0 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$. Tenemos

$$\mathrm{d}\omega_n = 0.$$

<u>Proposición.</u> Para $v^1, \ldots, v^n \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\omega_n(v^1, \ldots, v^n) = \det \begin{pmatrix} e_0 & e_1 & \cdots & e_n \\ v_0^1 & v_1^1 & \cdots & v_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_0^n & v_1^n & \cdots & v_n^n \end{pmatrix} = v^1 \times \cdots \times v^n.$$

El determinante significa la expansión según las reglas conocidas, tomando nota que todas las entradas conmutan aunque no sean todas escalares. El valor del determinante es un paravector que se identifica con un elemento de $\mathbb{R}^{n+1}$, que se afirma que es igual al producto cruzado.

<u>Demostración.</u> Primero,

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\widehat{x}_i(v^1, \ldots, v^n) = \\ &\quad \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}(n)} (\operatorname{sgn}\sigma) \,\mathrm{d}x_0(v^{\sigma(1)}) \cdots \mathrm{d}x_{i-1}(v^{\sigma(i-1)}) \,\mathrm{d}x_{i+1}(v^{\sigma(i)}) \cdots \mathrm{d}x_n(v^{\sigma(n)}) \\ &\quad = \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}(n)} (\operatorname{sgn}\sigma) v_0^{\sigma(1)} \cdots v_{i-1}^{\sigma(i-1)} v_{i+1}^{\sigma(i)} \cdots v_n^{\sigma(n)}. \end{aligned}$$

De esto,

$$\begin{aligned} &\omega_n(v^1, v^2, \ldots, v^n) = \\ &\quad \sum_{i=0}^{n} (-1)^i e_i \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}(n)} (\operatorname{sgn}\sigma) v_0^{\sigma(1)} \cdots v_{i-1}^{\sigma(i-1)} v_{i+1}^{\sigma(i)} \cdots v_n^{\sigma(n)} \end{aligned}$$

lo cual es igual al determinante $(n+1)\times(n+1)$ referida en el enunciado, representada en expansión por menores sobre el primer renglón. Esto demuestra la primera igualdad.

Puesto que la i-ésima entrada de $\omega_n(v^1, v^2, \ldots, v^n)$ como elemento de $\mathbb{R}^{n+1}$ es lo mismo que el coeficiente de e_i (que se identifica con $\vec{\delta}_i$), el producto punto de un vector arbitrario $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ con $\omega_n(v^1, v^2, \ldots, v^n)$ es

$$w \cdot \omega_n(v^1, v^2, \ldots, v^n) = \sum_{i=0}^{n} w_i \, [\omega_n(v^1, v^2, \ldots, v^n)]_i = \det \begin{pmatrix} w \\ v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix},$$

es decir, se obtiene sustituyendo e_i con w_i en el determinante. Se sigue que $\omega_n(v^1, v^2, \ldots, v^n) \perp v^i$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Además, por ser ω_n una función multilineal alternante,

$$\omega_n(v^1, v^2, \ldots, v^n) = \omega_n\big(\sum_i v_i^1 \vec{\delta}_i, \sum_i v_i^2 \vec{\delta}_i, \ldots, \sum_i v_i^n \vec{\delta}_i\big)$$

$$= \det(v^1, \ldots, v^n)\, \omega_n(\vec{\delta}_1, , \ldots, \vec{\delta}_n),$$

y como $\omega_n(\vec{\delta}_1, , \ldots, \vec{\delta}_n) = e_0$, tenemos

$$\omega_n(v^1, v^2, \ldots, v^n) = \det(v^1, v^2, \ldots, v^n)$$

$$= \mathrm{vol}_n\, P(v^1, v^2, \ldots, v^n) = |v^1 \times v^2 \times \cdots \times v^n|.$$

De esto se sigue que $\pm\omega_n(v^1, v^2, \ldots, v^n)$ es igual al producto vectorial $v^1 \times v^2 \times \cdots \times v^n$.

Para determinar el signo, consideramos el caso particular $v^i = \vec{\delta}_i$. Entonces

$$\begin{aligned} \omega(\vec{\delta}_1, \ldots, \vec{\delta}_n) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \, \mathrm{d}\widehat{x}_i(\vec{\delta}_1, \ldots, \vec{\delta}_n)\, e_i \\ &= (-1)^0 \, \mathrm{d}\widehat{x}_0(\vec{\delta}_1, \ldots, \vec{\delta}_n)\, e_0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Como ω_n es una continuous function en $(\mathbb{R}^{n+1})^n$, el signo siempre es "+". $\square$

7.5. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ una subvariedad de dimensión n, parametrizada por $x(t) = (x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t))$ donde $t = (t_1, \ldots, t_n)$. Con base en esta información se puede calcular la n-forma diferencial $\mathrm{d}S = \mathrm{d}S_M(x)$ para M, que satisface

$$\mathrm{d}S(v^1, \ldots, v^n) = \mathrm{vol}_n\, P(v^1, \ldots, v^n)$$

para vectores $v^1, \ldots, v^n$ tangentes a M en un punto $x \in M$. (No se define $\mathrm{d}S$ para $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus M$, y la relación arriba no se satisface para vectores que no sean todos tangentes a M en un mismo punto.) El volumen n-dimensional ("hiperárea") de M es $\int_M \mathrm{d}S$ y la integral de una función sobre M es $\int_M f\, \mathrm{d}S$.

7.6. El volumen n-dimensional de la esfera $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ es

$$\sigma_n = \mathrm{vol}_n\, \mathbb{S}^n = \int_{\mathbb{S}^n} \mathrm{d}S.$$

Se puede demostrar que

$$\sigma_n = \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma((n+1)/2)}$$

pero no necesitaremos este hecho.

<u>Proposición.</u> La integral de la potencia $|x|^{-p}$ sobre la bola de dimensión $n+1$, $\mathbb{B}^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ es finita sí y solo sí $p < n+1$.

<u>Demostración.</u> Observemos que $\mathrm{vol}_n(r\,\mathbb{S}^n) = r^n \sigma_n$. Por lo tanto el volumen entre dos esferas concéntricas cercanas es $\mathrm{vol}_{n+1}(((r + \mathrm{d}r)\mathbb{B}^{n+1}) \setminus (r\mathbb{B}^{n+1})) \sim (\sigma_n r^n)5\,\mathrm{d}r$, es decir $\mathrm{d}V = r^n\, \mathrm{d}r\ \mathrm{d}S$. Luego

$$\int_{\mathbb{B}^{n+1}} |x|^{-p}\ \mathrm{d}V = \int_0^1 \Big(\int_{r\mathbb{S}^n} r^{-p}\ \mathrm{d}S \Big)\, \mathrm{d}r$$

$$= \int_0^1 r^{-p}(r^n \sigma_n)\, \mathrm{d}r = \frac{\sigma_n}{n+1-p}\, r^{n+1-p}\Big|_0^1$$

para $p \neq n+1$. (La integral es un logaritmo when $p = n+1$.) Esto es finito precismente cuando $n+1-p > 0$. $\square$

Lo mismo se tiene para la integral de $|x|^{-p}$ sobre cualquier abierto que contiene a $0 \in \mathbb{R}^d$.

7.7. Un vector normal a M en el punto $x(t)$ es ortogonal a todas las derivadas $\partial x/\partial t_i$, por ejemplo

$$\frac{\partial x}{\partial t_1} \times \cdots \times \frac{\partial x}{\partial t_n}.$$

Al dividir esto por su valor absoluto obtenemos el vector normal unitario $\vec{n}$, que es independiente del sistema de coordinadas (salvo que dará $-\vec{n}$ para coordinadas que difieren por un cambio de orientación). Lo escribimos como un paravector,

$$\vec{n}(x) = \sum_{i=0}^{n} n_i(x) e_i.$$

Proposición. $\omega_n = \vec{n}\, \mathrm{d}S$ en M. Es decir, si $v^1, \dots, v^n$ son tangentes a M en x, entonces $\omega_n(v^1, \dots, v^n) = \vec{n}\, \mathrm{d}S(v^1, \dots, v^n)$ en x.

(A veces se dice que $\vec{n}\, \mathrm{d}S$ es "el elemento de superficie paravector-valuado".)

Demostración. Para $v^1, \dots, v^n$ tangentes a M, son ortogonales a $\vec{n}$. Usando $d = n+1$ en los resultados sobre el volumen,

$$\mathrm{vol}_{n+1}(v^1, \dots, v^n, \vec{n}) = |\vec{n}|\, \mathrm{vol}_n(v^1, \dots, v^n) = \mathrm{d}S(v^1, \dots, v^n).$$

Cuando $v^1, \dots, v^n$ son linealmente dependientes, ω_n los envía a 0, también lo hace $\vec{n}\, \mathrm{d}S$. Cuando son linealmente independientes, existe una parametrización $x(t_1, \dots, t_n)$ tal que $\partial x/\partial t_i = v^i$. Por la proposición sobre ω_n y la definición de $\vec{n}$,

$$\omega_n(\frac{\partial x}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial t_n}) = \left| \frac{\partial x}{\partial t_1} \times \cdots \times \frac{\partial x}{\partial t_n} \right| \vec{n}.$$

Se sigue que $\omega_n(v^1, \dots, v^n) = \vec{n}\, \mathrm{d}S(v^1, \dots, v^n)$. $\square$

7.8. Consecuencias del Teorema de Stokes

Proposición. (Teorema de Gauss para $\overline{\partial}$.) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un dominio acotado con frontera suave de conectividad finita. Sea $\vec{n}(x)$ el vector normal a $\partial\Omega$ apuntando al exterior en $x \in \partial\Omega$. Sean $f, g \in C^1(\overline{\Omega}, \mathcal{C}\ell(n))$ (diferenciables en el interior, continuas hasta la frontera). Entonces

$$\int_{\partial\Omega} f\, \vec{n}\, g\, \mathrm{d}S = \int_{\Omega} \big((f\overline{\partial})g + f(\overline{\partial} g)\big)\, \mathrm{d}V.$$

Demostración. Como cálculo preliminar,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f \wedge \omega_n &= \mathrm{d}f \wedge \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \,\mathrm{d}\widehat{x}_i \, e_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \,\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\widehat{x}_i \, e_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\frac{\partial f}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x_i) \wedge \mathrm{d}\widehat{x}_i \, e_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \,\mathrm{d}V \, e_i \\
&= (f\overline{\partial}) \,\mathrm{d}V
\end{aligned}$$

y de forma similar $\omega_n \wedge \mathrm{d}g = (\overline{\partial} g)\,\mathrm{d}V$. Ahora podemos evaluar la $(n+1)$-forma

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(f\vec{n}g \,\mathrm{d}S) = \mathrm{d}(f\omega_n g) &= \mathrm{d}f \wedge (\omega_n g) + f\, d(\omega_n g) \\
&= \mathrm{d}f \wedge \omega_n g + f \,\mathrm{d}\omega_n \, g + (-1)^n f \omega_n \wedge \mathrm{d}g \\
&= \big((f\overline{\partial})g + f(\overline{\partial} g)\big) \,\mathrm{d}x + f \,\mathrm{d}\omega_n \, g
\end{aligned}$$

y como $d\omega_n = 0$ la afirmación se sigue del Teorema de Stokes con $\omega = f\vec{n}g \,\mathrm{d}S$. □

Corolario. (Teorema de la Integral de Cauchy) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ con frontera suave. Sean $f, g \colon \overline{\Omega} \to \mathcal{C}\ell(n)$ continuas con $f|_\Omega$ monogénica por la izquierda, $g|_\Omega$ monogénica por la derecha. Entonces

$$\int_{\partial\Omega} f(x)\, \vec{n}(x)\, g(x) \;\mathrm{d}S = 0.$$

Corolario. (Fórmula de Green para ∂.) Con las mismas hipótesis sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, y con $f \in \mathbb{C}^2(\overline{\Omega})$,

$$\int_{\partial\Omega} (f\partial)\vec{n} \,\mathrm{d}S = \int_{\Omega} \Delta f \,\mathrm{d}V.$$

Demostración. Usar $f\partial$ en lugar de f y 1 en lugar de g en el Teorema de Gauss, notando $\partial\overline{\partial} = \Delta$. □