FUNCIONES HIPERHOLOMORFAS #3

Análisis hipercomplejo

3.1. La teoría de la variable compleja puede describirse a partir del sistema de ecuaciones de Cauchy-Riemann para funciones $f(x_0, x_1) = (f_0(x_0, x_1), f_1(x_0, x_1))$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1},$$
$$\frac{\partial f_0}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_0}{\partial x_0}.$$

A partir de estas ecuaciones diferenciales se pueden llegar a diversas conclusiones para funciones f que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

1. La integral de línea de f alrededor de una curva cerrada que encierra un área donde está definida f, es cero. Por lo tanto las integrales de línea de f alrededor de un curvas cerradas homotópicas en un área donde está definida f, son iguales.

2. Cuando se introduce un álgebra en la cual $(x_0, x_1)(y_0, y_1) = (x_0y_0 - x_1y_1, x_0y_1 + x_1y_0)$, la función (f_0, f_1) puede expresarse localmente en términos de una serie de potencias de (x_0, x_1) con coeficientes en esta álgebra.

3. En el contexto de esta álgebra, f es aniquilada por el operador simbólico
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$$

4. El operador simbólico anterior compuesto con el operador
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right)$$
produce
$$(\Delta, 0)$$
donde Δ es el laplaciano. Por lo tanto las funciones $f_0(x_0, x_1)$, $f_1(x_0, x_1)$ son armónicas.

Hay muchas otras propiedades interesantes que son consecuencias de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Lo más importante es tener presente que *lo anterior no describe el orden en que la teoría de la variable compleja fue descubierta.* Se empezó con el punto 3, y a partir del álgebra se fueron descubriendo las propiedades. (Riemann sí desarrolló mucha de la teoría en este orden, pero sólo después de que una gran parte fue descubierta a partir de las "variables complejas".)

3.2. Escribimos

$$\overline{\partial} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} e_k.$$

Usaremos el símbolo $\overline{\partial}$ para definir dos operadores diferenciales sobre las funciones diferenciables $f\colon \Omega \to \mathcal{C}\ell(n)$, donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ es cualquier dominio, como sigue. Escribimos elementos $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ como paravectores,

$$x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Expresamos f en coordenadas de Clifford como

$$f(x) = \sum_{A \in 2^n} f_A(x)\, e_A$$

donde cada $f_A(x)$ es una función real-valuada de $n+1$ variables. Decimos que f es de clase C^r cuando todas las f_A son de clase C^r. La funcion $\overline{\partial} f$ se define como

$$\overline{\partial} f = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) e_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{A \in 2^n} \left(\frac{\partial f_A}{\partial x_k}\right)(e_A e_k).$$

En esta expresión se aplican las reglas del álgebra de Clifford, es decir, $e_k e_A$ es igual a $\pm e_B$ para algún $B \in 2^n$, y se combinan los términos con el mismo B. Así $\overline{\partial} f\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{C}\ell(n)$. Se dice que se ha aplicado $\overline{\partial}$ a f por la izquierda. Hay un operador análogo por la derecha:

$$f\,\overline{\partial} = \sum_{k=0}^{n} e_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{A \in 2^n} \left(\frac{\partial f_A}{\partial x_k}\right)(e_k e_A).$$

Se define el operador conjugado (en el sentido de las álgebras de Clifford) ∂ de la misma manera, con el símbolo

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x_0} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} e_k.$$

∂, $\overline{\partial}$ se conocen como operadores de Fueter u operadores de Moisil-Teodorescu o de Cauchy-Riemann.

Para conveniencia se puede escribir

$$\vec{\partial} = \sum_{i=1}^{n} \partial_i, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

(a veces llamado operador de Dirac) y $\partial = \partial_0 - \vec{\partial}$, $\overline{\partial} = \partial_0 + \vec{\partial}$.

Definición. f se llama monogénica por la izquierda cuando $\overline{\partial} f = 0$, y monogénica por la derecha cuando $f\overline{\partial} = 0$. También se dice hiperholomorfa u holomorfa o a veces regular en lugar de monogénica.

Estas son las funciones que se estudian principalmente en el análisis de Clifford. La ecuación $\overline{\partial} f = 0$ es un sistema de 2^n ecuaciones reales en derivadas parciales lineales simultáneas de primer orden, análogo al sistema de dos ecuaciones de Cauchy-Riemann en variable compleja.

Existen variantes en la definición de $\overline{\partial}$, por ejemplo omitiendo el término $(\partial/\partial x_0)f$ o bien $(\partial/\partial x_{12\ldots n})f$, por lo que en cada conversación es necesario precisar cual definición de $\overline{\partial}$ se está usando.

Ejercicio. $\overline{(\partial f)} = \overline{f}\,\overline{\partial}$, $\overline{(\overline{\partial} f)} = \overline{f}\,\partial$.

Ejercicio. Para $a \in \mathcal{C}\ell(n)$ constante, $\partial(fa) = (\partial f)a$, $\overline{\partial}(fa) = (\overline{\partial} f)a$, $(af)\partial = a(f\partial)$, $(af)\overline{\partial} = a(f\overline{\partial})$.

Ejercicio. ¿Se puede expresar $\partial(fg)$ en términos de ∂f, ∂g?

3.3. Proposición. Aplicado a funciones de clase C^2, tenemos $\overline{\partial}\,\partial = \partial\,\overline{\partial} = \Delta e_0$ donde Δ es el laplaciano en $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$\Delta = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Como Δ no lleva ningún e_i, su aplicación a una función que toma valores en $\mathcal{C}\ell(n)$ es por separado en cada componente, es decir,

$$\Delta f = \sum_{A \in 2^n} \big(\Delta f_A(x)\big)\, e_A = f\Delta.$$

Demostración. Para las funciones f de clase C^2, tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\partial\,\overline{\partial} &= \Big(\frac{\partial}{\partial x_0}e_0 - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}e_k\cdot\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_0}e_0 + \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_l}e_l\Big) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}e_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_l}e_0 e_l - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_0}e_k e_0 \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}e_k e_l
\end{aligned}$$

La segunda y tercera sumandos se cancelan, y el cuarto es igual a

$$\begin{aligned}
&-\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}e_k^2 - \sum_{k\neq l}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}e_k e_l \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}e_0 + \sum_{k<l}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}e_k e_l + \sum_{k>l}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}e_k e_l
\end{aligned}$$

y los dos últimos sumandos nuevamente se cancelan. Combinando obtenemos Δ. La demostración para $\overline{\partial}\partial$ es casi igual. □

Éste es el primer ejemplo en que la extraña definición de multiplicación en álgebras de Clifford produce algo realmente interesante.

Corolario. Las funciones monogénicas (por lo menos las de clase C^2) son armónicas. (Es decir, cada componente es armónica.)

3.4. La función identidad $f(x) = x$ no es monogénica en $C(n)$, $n > 1$. Más generalmente, tampoco son monogénicos los monomios x^n. Cuando f, g son monogénicas, su composición $g \circ f$ no tiene que ser monogénica.

No existe una noción totalmente natural de "polinomio Clifford". Por ejemplo, uno puede considerar polinomios por la izquierda o por la derecha $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{N} x^n a_n$, con $a_n \in \mathcal{C}\ell(n)$ o formas más complejas con sumandos $a_0 x a_1 x \cdots x a_n$. Para fijar terminología, consideraremos primero unos polinomios muy generales, que son los polinomios en $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en lugar de polinomios "en x": un monomio real es $ax_0^{i_0}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ con $a\in\mathbb{R}$. Es conveniente usar <u>multiíndices</u> $\vec{i} = i_0, i_1, i_n \in \mathbb{Z}^n$ y El <u>grado</u> del monomio es $|\vec{i}| = i_0 + i_1 + \cdots i_n$. Un <u>polinomio homogéneo de grado m</u> real-valuada es una suma

$$\sum_{\vec{i}} a_{\vec{i}} x^{\vec{i}} = \sum_{(i_0,i_1,\ldots i_n)} a_{i_0,i_1,i_n} x_0^{i_0} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$$

con $a_{\vec{i}}\in\mathbb{R}$, y con cada $|\vec{i}| = m$.

La colección de polinomios en $x_0, x_1, \ldots, x_n$ homogéneos de grado m se llamará $\mathrm{Pol}_{n+1}^{(m)}$. Un <u>polinomio</u> en $x_0, x_1, \ldots, x_n$ es una suma finita de polinomios homogéneos.

Finalmente, un <u>polinomio $\mathcal{C}\ell(n)$-valuada</u> es una función $\sum_{A\in 2^n} p_A(x)\, e_A$ donde cada p_A es un polinomio real en $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Su grado es el mayor grado de los p_A. Es <u>homogeneo de grado m</u> cuando $p_A \in \mathrm{Pol}_{n+1}^{(m)}$ para cada $A\in 2^n$.

<u>Ejercicio.</u> Encontrar todos los polinomios homogéneos de grado 0,1 y 2 con valores en $Cl(1)$, $Cl(2)$, $Cl(3)$ que son monogénicos por la izquierda. (Pista: hay 2^n de ellos de grado 0.)

3.5. Una razón por la cual son importantes los polinomios homogéneos es la siguiente.

<u>Proposición.</u> Sean $p_m \in \mathrm{Pol}_{n+1}^{(m)}(\mathcal{C}\ell(n))$ y sea $f = \sum_{m=0}^{N} p_m$. Si $\overline{\partial} f = 0$, entonces $\overline{\partial} p_m = 0$ para cada m. Similar para $f\overline{\partial}$, ∂f, $f\partial$ y Δf .

<u>Demostración.</u> Tenemos $\sum_{m=0}^{N} \overline{\partial} p_m = 0$, $\overline{\partial} p_m \in \mathrm{Pol}_{n+1}^{(m-1)}(\mathcal{C}\ell(n))$, luego $\overline{\partial} p_m$ es la parte homogénea de grado m del polinomio 0. Así $\overline{\partial} p_m = 0$. □

(Lo mismo se tiene para sumatorias infinitas $f = \sum_{m=0}^{\infty} p_m$ que convergen uniformemente.)

3.6. La generalización natural de "derivada" como

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}(f(x+h) - f(x)) \quad \text{o} \quad \lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x))h^{-1}$$

no produce un concepto razonable en las álgebras de Clifford distintas de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, aún cuando se limita el concepto de límite a valores de h

para las cuales las inversas h^{-1} siempre existen. (Veremos más sobre esto después en el contexto de los cuaternios.)

Veamos cómo son las derivadas direccionales de funciones $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{C}\ell(n)$. Las variables de Fueter aparecerán de forma natural en la siguiente discusión. Sea $f\colon \Omega \to \mathcal{C}\ell(n)$ de clase C^1, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Consideremos una curva suave $x\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \Omega$. Entonces la siguiente expresión toma valores en $\mathcal{C}\ell(n)$, la <u>derivada direccional</u>

$$\begin{aligned}
\frac{df(x(t))}{dt} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x(t)) \frac{dx_k}{dt}(t) \\
&= \frac{\partial f(x)}{\partial x_0}\frac{dx_0}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{dx_k}\frac{dx_k}{dt} \\
&= \big(\overline{\partial} f - \sum_{k=1}^{n} e_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\big)\frac{dx_0}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{dx_k}\frac{dx_k}{dt} \\
&= \overline{\partial} f \frac{dx_0}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \big(\frac{dx_k}{dt} - e_k \frac{dx_0}{dt}\big)\frac{\partial f}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

<u>Proposición.</u> Si f es monogénica por la izquierda, entonces para cualquier $h \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \sum_{1}^{n} (h_k - e_k h_0)\frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Si f es monogénica por la derecha, el límite es $\displaystyle\sum_{1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(h_k - e_k h_0)$.

El punto clave es que el límite depende de h, no sólo de f y x.

<u>Demostración.</u> Tomemos una curva lineal, $x(t) = x(0) + ht$, luego $dx_0/dt = h_0$, $dx_k/dt = h_k e_k$. Entonces

$$\frac{df(x+th)}{dt} = h_0 \overline{\partial} f + \sum_{k=1}^{n} (h_k - e_k h_0)\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Si $\overline{\partial} f = 0$, al integrar, obtenemos

$$f(x(t)) - f(x) = \int_0^t \frac{df(x(t))}{dt}\, dt = \sum_{1}^{n} (h_k - e_k h_0) \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_k}(x(t))\, dt.$$

Como $\partial f/\partial x_k$ es continua, para t pequeño el integrando es uniformente cercano a $(\partial f/\partial x_k)(x(0))$, y la integral es arbitrariamente cercano a $t(\partial f/\partial x_k)(x(0))$. La demostración es similar para $f\overline{\partial} = 0$. $\square$

3.7. La fórmula en que se basaba el resultado anterior podría escribirse en forma más concisa como

$$df = (\overline{\partial} f)dx_0 + \sum_{k=1}^{n}(dx_k - e_k dx_0)\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

Dado $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, las <u>variables de Fueter</u> correspondientes a x son

$$z_k = x_k - x_0 e_k \in \mathcal{C}\ell(n) \quad (1 \leq k \leq n).$$

Normalmente se piensa en $z_k = z_k(x)$ como funciones de x. Así tenemos

$$\begin{aligned} df &= (\overline{\partial} f)dx_0 + \sum_{k=1}^{n} dz_k \frac{\partial f}{\partial x_k}. \\ &= (f\overline{\partial})dx_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{\partial} f}{\partial x_k} dz_k. \end{aligned}$$

La coleccion $z_1, \ldots, z_n$ son paravectores con un coeficiente común x_0 en la parte vectorial correspondiente. Si conocemos $z_1, \ldots, z_n$ con esta propiedad, podemos recuperar $x = (x_0, x_1, \ldots x_n)$ con $x_0 =$ el coeficiente vectorial de cualquier z_k, y $x_k = \operatorname{Sc} z_k$ para $k > 0$. Tenemos $e_k x + x e_k = -2z_k$.

<u>Ejercicio.</u> Las variables de Fueter z_k son funciones monogénicas de x por la izquierda y por la derecha. De hecho, las potencias z_k^m de las variables de Fueter son monogénicas.

De esto, cualquier función de la forma

$$\ell(x) = \sum_{1}^{n} z_k a_k$$

con $a_k \in \mathcal{C}\ell(n)$, es monogénica por la izquierda, y si

$$\ell(x) = \sum_{1}^{n} a_k z_k$$

entonces ℓ es monogénica por la derecha. Esto da la esperanza de usar las variables de Fueter en lugar de los monomios para lograr algo análogo de las series de potencias. Son funciones que son lineales por la izquierda (derecha) "como funciones de z_k" (habría que precisar en qué espació están los z_k), pero no como funciones de x: en general $z_k(ax) \neq az_k(x)$.

Ejercicio. Cualquier polinomio de grado 1 en $\mathcal{C}\ell(n)$ que es monogénica por la izquierda es una combinación lineal por la derecha de variables de Fueter z_k.

3.8. Las variables de Fueter sirven para definir los polinomios de Fueter. Siempre $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ se considera como paravector. Estamos interesados en potencias de las variables de Fueter z_k. El símbolo $\vec{z}$ se usará en productos de potencias de la siguiente forma

$$\vec{z}^{\vec{k}} = z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n},$$

consideradas como funciones de x. En esta notación $\vec{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ es un multiíndice, por el momento siempre $k_1, \ldots, k_n \geq 0$. Se escribe $|\vec{k}| = k_1 + \cdots + k_n$.

La definición de $\vec{z}^{\vec{k}}$ depende del orden natural $z_1, z_2, \ldots$. Como la multiplicación no es conmutativa, y como por lo general $\vec{z}^{\vec{k}}$ no es monogénico, hay que simetrizar sobre todos los posible órdenes.

Primero, dado $\vec{k} \in \mathbb{Z}^n$, considerado como una lista de exponentes, le asociamos otro multiíndice, la lista de índices correspondiente, $\vec{j} = (j_1, \ldots, j_{|k|}) \in \mathbb{Z}^{|k|}$

$$\begin{aligned} j_1 = j_2 = \cdots = j_{k_1} &= 1, \\ j_{k_1+1} = j_{k_1+2} = \cdots = j_{k_1+k_2-1} &= 2, \\ &\vdots \\ j_{|\vec{k}|-k_n+1} = \cdots = j_{|\vec{k}|-1} = j_{|\vec{k}|} &= n. \end{aligned}$$

Así la lista $\vec{j}$ tiene sus primeras k_1 entradas iguales a 1, sus siguientes k_2 entradas iguales a 2, etc. Por ello $\vec{z}^{\vec{k}} = z_{j_1} z_{j_2} \cdots z_{j_{|\vec{k}|}}$. Es posible que alguno de los índices $k_1, \ldots, k_n$ sea 0, luego dicho índice no genera ninguna entrada en $\vec{j}$ y ningún factor en el producto $\vec{z}^{\vec{k}}$.

Sea $\mathrm{Perm}(m)$ el grupo de las $m!$ permutaciones de $\{1, 2, \ldots, m\}$, y para $\sigma \in \mathrm{Perm}(|\vec{k}|)$. Permutamos los elementos de $\vec{j}$ y promediamos los productos para definir los polinomios de Fueter en $\mathcal{C}\ell(n)$,

$$\mathcal{P}_{\vec{k}}(x) = \frac{1}{|\vec{k}|!} \sum_{\sigma\in\mathrm{Perm}(|\vec{k}|)} z_{j_{\sigma(1)}} \cdots z_{j_{\sigma(|\vec{k}|)}} \quad (x \in \mathcal{C}\ell(n)).$$

En particular, cuando $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$, escribimos $\vec{k} = \vec{0}$ y tenemos un producto vacío,

$$\mathcal{P}_{\vec{0}}(x) = 1$$

para todo x. Si alguno de $k_1, \ldots, k_n$ es negativo definimos $\mathcal{P}_{\vec{k}}(x) = 0$ por convención. Sea $\vec{\delta}_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^n$.

Entonces $\mathcal{P}_{\vec{k}} \in \mathrm{Pol}_{n+1}^{(|\vec{k}|)}$. (Homogéneo de grado $|\vec{k}|$ en $n+1$ variables.)

3.9. Cuando trabajamos con las funciones monogenicas, la ecuación $\overline{\partial} f = 0$ permite deducir el valor de $\partial_0 f$ cuando conocemos $\partial_i f$) $(1 \le i \le n)$. Por eso muchas fórmulas no requieren la derivada con respecto a x_0. Así ponemos lal convención que la suma de un $\vec{\delta}_i \in \mathbb{Z}^{n+1}$ $(i > 0)$ con un multiíndice $k \in \mathbb{Z}^n$ se define omitiendo el 0 inicial en $\vec{\delta}_i$:

$$\vec{k} \pm \delta_i = (k_1,\ \ldots,\ k_i \pm 1,\ \ldots,\ k_n).$$

Teorema. Sea $\vec{k} \in \mathbb{Z}^n$.

(I) $|\vec{k}|\mathcal{P}_{\vec{k}}(x) = \sum_{i=1}^n k_i \mathcal{P}_{\vec{k}-\vec{\delta}_i}(x) z_i = \sum_{i=1}^n k_i z_i \mathcal{P}_{\vec{k}-\vec{\delta}_i}(x)$;

(II) $\sum_{i=1}^n k_i e_i \mathcal{P}_{\vec{k}-\vec{\delta}_i} = \sum_{i=1}^n k_i \mathcal{P}_{\vec{k}-\vec{\delta}_i} e_i$;

(III) (a) $$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0}\mathcal{P}_{\vec{k}} &= -\sum_{i=1}^n k_i e_i \mathcal{P}_{\vec{k}-\delta_i} = -\sum_{i=1}^n k_i \mathcal{P}_{\vec{k}-\delta_i} e_i \\ &= -\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{P}_{\vec{k}}}{\partial x_i} e_i = -\sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial \mathcal{P}_{\vec{k}}}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

(b) $\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{P}_{\vec{k}} = k_i \mathcal{P}_{\vec{k}-\vec{\delta}_i}$ $(1 \le i \le n)$;

Por la fórmula (IIIa), los polinomios de Fueter son monogénicos por la izquierda y por la derecha. La (I) es una fórmula de recursión, es decir, expresa $\mathcal{P}_{\vec{k}}$ en términos de polinomios de Fueter de grado $|\vec{k}| - 1$.

Demostración. (I) Sea $m = |\vec{k}|$. Por definición,

$$m!\,\mathcal{P}_{\vec{k}}(x) = \sum_{\sigma\in\mathrm{Perm}(m)} z_{j_{\sigma(1)}} \cdots z_{j_{\sigma(m)}} = \sum_{i=1}^n \sum_{\{\sigma:\, j_{\sigma(m)=i}\}} z_{j_{\sigma(1)}} \cdots z_{j_{\sigma(m-1)}}\, z_i.$$

Observemos primero que las permutaciones se pueden distinguir según adonde envián el último índice en $\vec{j}$: $\mathrm{Perm}(m) = \bigcup_{i=1}^{n} \{\sigma\colon j_{\sigma(m)=i}\}$ es una unión disjunta en la cual el i-ésimo conjunto tiene $(m-1)!k_i$ elementos. Esto es porque hay k_i valores de t tales que $j_t = i$, y quedan $m-1$ valores en $\{1,\ldots,n\} \setminus \{\sigma(m)\}$ a permutarse en forma arbitraria. (Naturalmente, $\sum_{i=1}^{n}(m-1)!k_i = m!$.) Segundo, observemos que $j_{\sigma(1)} \cdots j_{\sigma(m-1)}$ es una permutación arbitraria de la lista de índices correspondiente a $\vec{k} - \vec{\delta}_i$. Lo mismo sucede cuando se agrupan los términos por los en que $j_{\sigma(1)} = i$. Por lo tanto

$$m!\, \mathcal{P}_{\vec{k}}(x) \;= \sum_{i=1}^{n} (m-1)! k_i \, \mathcal{P}_{\vec{k}-\vec{\delta}_i}\, z_i = \sum_{i=1}^{n} (m-1)! k_i \, z_i \mathcal{P}_{\vec{k}-\vec{\delta}_i}$$

y al dividir entre $(m-1)!$ obtenemos la afirmación.
(II) Al sustituir $z_i = x_i - x_0 e_i$ en la igualdad de (I), se cancelan los términos $k_i x_i \mathcal{P}_{\vec{k}-\vec{\delta}_i}$, luego se divide lo que queda por x_0, dejando la afirmación.
(III) Por inducción. Consideremos la afirmación (b). Es cierto para $|\vec{k}| = 0$ pues $\partial \mathcal{P}_{\vec{0}}/\partial x_i = 0$ y $\mathcal{P}_{\vec{0}-\delta_i} = 0$. Supongamos que (a) es cierto cuando $|\vec{k}| = m-1$, y consideremos $\vec{k}$ con $|\vec{k}| = m$. Aplicamos $\partial/\partial x_i$ a (I) para expresar $\mathcal{P}_{\vec{k}}$ en términos de polinomios de Fueter de grado $m-1$, a los cuales se aplica la hipótesis inductiva:

$$|\vec{k}| \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{P}_{\vec{k}} = \sum_{j=1}^{n} k_j \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathcal{P}_{\vec{k}-\vec{\delta}_j} z_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} k_j \big(\frac{\partial \mathcal{P}_{\vec{k}-\vec{\delta}_j}}{\partial x_i} z_j + \mathcal{P}_{\vec{k}-\vec{\delta}_j} \frac{\partial z_j}{\partial x_i} \big).$$

La hipótesis de inducción dice (con $i, j \geq 1$):

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{\vec{k}-\vec{\delta}_j}}{\partial x_i} = \begin{cases} k_i \mathcal{P}_{\vec{k}-\vec{\delta}_j-\vec{\delta}_i}, & i \neq j, \\ (k_i - 1) \mathcal{P}_{\vec{k}-2\vec{\delta}_1}, & i = j, \end{cases}$$

y claramente $\partial z_j / \partial x_i = \delta_{ij}$. Por lo tanto hay que separar los términos entre $i=j$ y $i\neq j$, y luego aplicar la expansión para $\mathcal{P}_{\vec{k}-\vec{\delta}_i}$:

$$\begin{aligned}
|\vec{k}|\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{P}_{\vec{k}} &= \big(\sum_{j\neq i} k_j(k_i\mathcal{P}_{\vec{k}-\vec{\delta}_j-\vec{\delta}_i})\, z_j + k_i((k_i-1)\mathcal{P}_{\vec{k}-2\vec{\delta}_i})\, z_i\big) + \sum_{j=1}^{n} k_j\mathcal{P}_{\vec{k}-\vec{\delta}_j}\delta_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^{n}(\vec{k}-\vec{\delta}_i)_j\mathcal{P}_{(\vec{k}-\vec{\delta}_i)-\vec{\delta}_j} z_j + k_i\mathcal{P}_{\vec{k}-\vec{\delta}_i} \\
&= k_i(|\vec{k}|-1)\mathcal{P}_{\vec{k}-2\vec{\delta}_i} + k_i\mathcal{P}_{\vec{k}-\vec{\delta}_i} \\
&= k_i\mathcal{P}_{\vec{k}-2\vec{\delta}_i}.
\end{aligned}$$

La parte (b) se demuestra por inducción de manera similar. la diferencia principal es usar $\partial z_i/\partial x_0 = -e_i$. □

Corolario. Los polinomios de Fueter son monogénicos por la izquierda y por la derecha.

Ejercicio. Los polinomios de Fueter toman sus valores en los paravectores: $\mathcal{P}_k\colon \mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$.

Ejercicio. Calcular todos los polinomios de Fueter de grados 1 y 2 (en términos de las variables de Fueter, y en términos de x).

3.10. Sea $\vec{k}=(k_0,k_1,\ldots,k_n)$ un multiíndice. Su factorial $\vec{k}$ se define como

$$\vec{k}! = k_0!k_1!\cdots k_n!.$$

Así $\vec{k}!\leq|\vec{k}|!$.

Proposición. Los polinomios $\{\mathcal{P}_{\vec{k}}\}$ son linealmente independientes en el espacio lineal por la izquierda $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1},\mathcal{C}\ell(n))$. También en el espacio lineal por la derecha.

Demostración. Por definición $\mathcal{P}_{\vec{k}}$ es una combinación lineal de productos de variables de Fueter de la forma

$$(x_{j_{\sigma(1)}}-x_0e_{j_{\sigma(1)}})(x_{j_{\sigma(2)}}-x_0e_{j_{\sigma(2)}})\cdots(x_{j_{\sigma(|k|)}}-x_0e_{j_{\sigma(1)}}).$$

Éste es un polinomio homogéneo $\mathcal{C}\ell(n)$-valuado de grado $|k|$. El único monomio en este producto que no contiene un factor de x_0 es

$$x_{j_{\sigma(1)}}x_{j_{\sigma(2)}}\cdots x_{j_{\sigma(|k|)}} = x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n} = x^{\vec{k}},$$

(de acuerdo con la relación entre $\vec{j}$ y $\vec{k}$). De hecho, este factor está en la parte escalar, y la suma de estos $\vec{k}!$ términos da el término

$$\vec{k}! \frac{1}{|\vec{k}|!} x^{\vec{k}}.$$

Ahora consideremos una relacion de dependencia lineal

$$\sum_{\vec{k}} \mathcal{P}_{\vec{k}}(x) a_{\vec{k}} = 0$$

con coeficientes constantes $\alpha_{\vec{k}} \in \mathcal{C}\ell(n)$. La parte homogénea de cada grado de esta sumatoria es cero, luego podemos suponer que todos los multiíndices son del mismo grado $|\vec{k}| = m$. Aislando los términos con $x^{\vec{k}}$ tenemos

$$x^{\vec{k}} a_{\vec{k}} = 0,$$

por lo que $a_{\vec{k}} = 0$ para todos los $\vec{k}$ de grado m. Como resultado, los $\mathcal{P}_{\vec{k}}$ son linealmente independientes. $\square$

Ejercicio. $|\mathcal{P}_{\vec{k}}(x)| \leq |z_1|^{k_1} \cdots |z_1|^{k_n} \leq |x|^{\vec{k}}$.

3.11. Podemos usar multiíndices para denotar composiciones de derivadas parciales:

$$\partial^{\vec{k}} = \partial_1^{k_1} \cdots \partial_n^{k_n}.$$

(Aplicadas a funciones de clase C^1, el orden de derivación no importa.)

Proposición. Sea $p \in \mathrm{Pol}_{n+1}^{(m)}(\mathcal{C}\ell(n))$ monogénico por la izquierda. entonces $p(x)$ puede expresarse de manera única como una combinación lineal por la derecha de polinomios de Fueter de grado m:

$$p(x) = \sum_{|\vec{k}|=m} \mathcal{P}_{\vec{k}}(x) a_{\vec{k}}$$

con coeficientes $a_{\vec{k}} \in \mathcal{C}\ell(n)$ dados por

$$a_{\vec{k}} = \frac{1}{|\vec{k}|!} \partial^{\vec{k}} p(0).$$

Demostración. $p(tx) = t^m p(x) \in \mathcal{C}\ell(n)$ para $t \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^n \partial_i p(tx) x_i = mt^{m-1}p(x)$, lo cual evaluado en $t = 1$ es la fórmula de Euler para funciones homogéneas,

$$\sum_{i=0}^{n} x_1 \partial_i p(x) e_0 = mp(x).$$

Pero por hipótesis $\overline{\partial} p = 0$:

$$\sum_{i=0}^{n} \partial_i p(x) e_i = mp(x).$$

Restando,

$$\sum_{i=0}^{n} z_1 \partial_i p(x) = mp(x).$$

Sea $|\vec{k}| = m$. Para cada i, $\partial_i p \in \mathrm{Pol}_{n+1}^{m-1}(\mathcal{C}\ell(n))$, luego

$$\sum_{j_1=0}^{n} z_{j_1} \partial_{j_1} \partial_{j_2} p(x) = (m-1)\partial_{j_2} p(x),$$

etc. Luego

$$\sum_{j_1=0}^{n} \cdots \sum_{j_m=0}^{n} z_{j_1} \cdots z_{j_m} \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_m} p(x) = m! p(x),$$

o sea

$$m! p(x) = \sum_{\vec{j}} z_{j_1} \cdots z_{j_m} \partial^{\vec{j}} p(x).$$

En la correspondencia $\vec{j} \leftrightarrow \vec{k}$ tenemos $\partial^{\vec{j}} = \partial^{\vec{k}}$. Sumando sobre $\sigma \in \mathrm{Perm}(m)$:

$$\begin{aligned}
m! p(x) &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma} \sum_{\vec{j}} z_{\sigma(j_1)} \cdots z_{\sigma(j_m)}\, \partial^{\vec{j}} p(x) \\
&= \frac{1}{m!} \left(\sum_{\vec{j}} \sum_{\sigma} z_{\sigma(j_1)} \cdots z_{\sigma(j_m)} \right) \partial^{\vec{j}} p(x) \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{\vec{j}} \mathcal{P}_{\vec{k}}(x)\, \partial^{\vec{k}} p(x)
\end{aligned}$$

(cada $\vec{k} \in \mathbb{Z}^m$ aparece $\vec{k}!$ veces). Ahora, $\partial^{\vec{k}} p(x)$ es una derivada de orden m de un polinomio de grado m, luego es constante, igual a $\partial^{\vec{k}}(x) = \partial^{\vec{k}}(0)$. Finalmente

$$p(x) = \sum_{|\vec{k}|=m} \mathcal{P}_{\vec{k}}(x) \frac{1}{m!} \partial^{\vec{k}} p(0),$$

que es combinación de polinomios de Fueter, y es única por la indepencia lineal. $\square$

3.12. Cualquier función real analítica en una vecindad de $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ tiene una serie de Taylor. Para $\vec{k} \in \mathbb{Z}^n$, $k_0 \in \mathbb{Z}$ no negativos, escribimos

$$x^{(k_0,\vec{k})} = x_0 x^{\vec{k}}, \quad \partial^{(k_0,\vec{k})} = \partial_0 \partial^{\vec{k}}.$$

La serie de Taylor real es

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k_0+|\vec{k}|=m} x_0^{(k_0,\vec{k})} c_{(k_0,\vec{k})}$$

con

$$c_{(k_0,\vec{k})} = \frac{1}{k_0! \vec{k}!} \partial^{(k_0,\vec{k})} f(0).$$

Si f además es monogénica por la izquierda, también lo son sus partes homogénicas, que se expresan con polinomios de Fueter:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\vec{k}|=m} \frac{1}{\vec{k}!} \mathcal{P}_{\vec{k}}(x)\, \partial^{\vec{k}} f(0),$$

que converge en una bola centrada en $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. En esta fórmula hemos eliminado las derivadas con respecto a x_0.

(Se demostrará después que las funciones monogénicas son real-analíticas.)