# ÁLGEBRAS DE CLIFFORD

*1.1.* Las álgebras de Clifford tomaron su inspiración en el álgebra exterior inventada por H. G. Grassmann.

En el álgebra exterior se considera un "producto" $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k$ de vectores $v_i \in \mathbb{R}^n$. Este producto representa en principio el paralelepípedo $P(v^1, \ldots, v^k) = \{\sum_{i=1}^k t_i v_i \colon\ 0 \leq t_i \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$, excepto que se le considera equivalente a otro producto $w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_k$ cuando el subespacio lineal de $\mathbb{R}^n$ generado por los $v_i$, es decir

$$\langle \{v_i\} \rangle = \mathrm{Span}(\{v_i\}) = \Big\{ \sum_{i=1}^n t_i v_i \colon\ t_i \in \mathbb{R} \Big\},$$

es igual a $\langle \{w_i\} \rangle$, y además los dos paralelepípedos tienen el mismo volumen $k$-dimensional. (Esto aplica cuando la orientación de $(v_1, \ldots, v_k) \mapsto (w_1, \ldots, w_k)$ se conserva. Cuando se invierte la orientación hay un cambio de signo, por ejemplo $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$). Esta noción de "producto" facilita el manejo de volúmenes de uniones de paralelepípedos, que luego facilita el manejo de integrales sobre subconjuntos $k$-dimensionales de $\mathbb{R}^n$.

Como ejemplo, si $w_1 = \cos\theta\, v_1 - \operatorname{sen}\theta\, v_2$, $w_2 = \operatorname{sen}\theta\, v_1 + \cos\theta\, v_2$, las reglas del álgebra exterior verifican que $w_1 \wedge w_2 = v_1 \wedge v_2$.

*1.2.* Un álgebra sobre $\mathbb{R}$ es un conjunto que tiene estructura de anillo (se pueden sumar, restar y multiplicar elementos con las leyes de asociativa y distributiva), y además admite una multiplicación por elementos de $\mathbb{R}$ que también es compatible con la estructura de anillo:

$$r(x + y) = rx + ry, \quad (r + s)x = rx + sx,$$

$$r(xy) = (rx)y = x(ry), \quad (rs)x = r(sx).$$

Se debe tener presente que la multiplicación en $xy$ no es la misma que en $rx$.

*1.3.* Las álgebras de Clifford surjen del deseo de multiplicar vectores: consideremos elementos básicos $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (que podrían ser la base canónica $\delta_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, o bien cualquier base de algún espacio vectorial $V$). Así las combinaciones lineales $\sum t_i e_i$ (o sea, otros vectores) también van a estar en el álgebra de Clifford. La multiplicación tendrá que crear otros elementos

$$\begin{gathered} e_1e_1,\ e_1e_2,\ e_1e_3,\ \ldots,\ e_1e_n, \\ e_2e_1,\ e_2e_2,\ e_2e_3,\ \ldots,\ e_2e_n, \\ e_3e_1,\ e_3e_2,\ e_3e_3,\ \ldots,\ e_3e_n, \\ \vdots \\ e_ne_1,\ e_ne_2,\ e_ne_3,\ \ldots,\ e_ne_n, \end{gathered}$$

pero no todos los productos son distintos. Se requiere $e_ie_j = -e_je_i$ cuando $i \neq j$:

$$\begin{array}{ccccc} e_1^2, & e_1e_2, & e_1e_3, & \ldots, & e_1e_n, \\ -e_1e_2, & e_2^2, & e_2e_3, & \ldots, & e_2e_n, \\ -e_1e_3, & -e_2e_3, & e_3^2, & \ldots, & e_3e_n, \\ & & & \vdots & \\ -e_1e_n, & -e_2e_n, & -e_3e_n, & \ldots, & e_n^2. \end{array}$$

Para definir $e_i^2$ necesitamos hablar de la unidad multiplicativa $e_0$ del álgebra de Clifford ($e_0$ no es un vector, sino otro tipo de elemento):

$$e_0e_i = e_ie_0 = e_i$$

para todo $i$ (inclusive $i = 0$). A veces se escribe $e_0 = 1$, pero no hay que confundir el 1 del álgebra de Clifford con el 1 de $\mathbb{R}$.

Los cuadrados de los elementos básicos pueden definirse de diversas maneras. Por ahora tomaremos $e_i^2 = -1$, (realmente $e_i^2 = -e_0$) para $i \geq 1$. (Esto es diferente del álgebra de Grassman, en donde $v \wedge v = 0$.)

*1.4.* Para que el álgebra sea cerrada bajo la operación de multiplicación, tiene ser posible multiplicar elementos básicos cuálquier número de veces. Un producto totalmente general sería

$$e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_k}$$

donde $k$ es cualquier número natural, y eliminamos cualquier $e_0$ que aparezca, es decir suponemos $1 \leq i_j \leq n$.

Si $k > n$, entonces hay por lo menos un índice repetido: $i_j = i_{j'}$. Se puede aplicar $e_ie_j = -e_je_i$ repetidamente para llegar a un producto con dos índices consecutivos iguales. Por ejemplo,

$$e_1e_3e_4e_2e_3 = -e_1e_3e_4e_3e_2 = e_1e_4e_3e_3e_2.$$

(Realmente se tiene que aplicar la ley asociativa y otras, como $e_1e_3e_4e_2e_3 = (e_1e_3e_4)(e_2e_3) = (e_1e_3e_4)(-e_3e_2) = -(e_1e_3e_4)(e_3e_2)$, etc.)

Los pares de elementos repetidos se convierten en $-e_0$ y luego se puede quitar $e_0$:

$$e_1e_4e_3e_3e_2 = -e_1e_4e_0e_2 = -e_1e_4e_2.$$

Por esta razón *todo producto de elementos básicos del álgebra de Clifford es igual a $\pm 1$ por algún producto de no más de $n$ elementos básicos.*

Se puede refinar este hecho un poco más: *se puede hacer que los índices estén en orden creciente:*

$$-e_1e_4e_2 = e_1e_2e_4.$$

Los productos que se obtienen de esta forma son los llamados elementos puros,

$$\begin{aligned}
0 &: \ e_0, \\
1 &: \ e_1,\ e_2,\ e_3,\ \ldots,\ e_n, \\
2 &: \ e_1e_2,\ e_1e_3,\ \ldots, e_1e_n, e_2e_3,\ \ldots,\ e_{n-1}e_n, \\
3 &: \ e_1e_2e_3,\ e_1e_2e_4,\ \ldots\ e_1e_2e_n,\ e_2e_3e_4,\ \ldots,\ e_{n-2}e_{n-1}e_n, \\
&\quad \ldots \\
n-1 &: \ e_1e_2\cdots e_{n-1},\ e_1\cdots e_{n-2}e_n,\ , e_1\cdots e_{n-3}e_{n-1}e_n,\ \ldots,\ e_2e_3\cdots e_n, \\
n &: \ e_1e_2e_3\cdots e_n.
\end{aligned}$$

El renglón numerado $k$ contiene $\binom{n}{k}$ productos de $k$ elementos básicos, y el total es $2^n$. En cada producto los índices aparecen en orden creciente y sin repeticiones, con esta condición diremos que el elemento básico está escrito en forma estándar.

En principio se podría definir $e_i^2$ como cualquier valor, normalmente un múltiplo real de $e_0$. En lo que se llaman álgebras de Clifford, siempre $e_i^2 = \pm e_0$, con el signo que depende de $i$. Para facilidad de notación se supone convencionalmente que $e_i^2 = 1$ para $1 \leq i \leq p$ y $e_i^2 = -1$ para $p+1 \leq i \leq n$.

Ejercicio. Al reducir un producto $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$ a su forma estándar por intercambio de factores contiguos, el resultado (y sobre todo el signo) no depende de la elección de los pasos intermedios.

*1.5.* Otra forma de representar un producto reducido $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$ con $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ es a través del subconjunto $A = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \in 2^n$ donde aquí $2^n$ significa la colección de todos los subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Así se puede escribir "$e_{\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}}$" o simplemente "$e_A$" en lugar de $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$. El conjunto vacío $A = \emptyset$ corresponde a $e_0$.

En esta notación, un producto de dos elementos básicos $e_A e_{A'}$ es de la forma $\pm e_B$ donde $B = A \triangle A' \in 2^n$ es la diferencia simétrica de los subjuntos $A, A'$: $A \triangle A' = \{k \in \{1, \ldots, n\}\colon\ k$ está en exactamente uno de $A,\ A'\}$. El signo $\pm$ lo denotaremos como $\tau(A, A') \in \{1, -1\}$. Así

$$
\begin{aligned}
&(e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k})(e_{i'_1} e_{i'_2} \cdots e_{i'_{k'}}) \\
&\qquad\qquad = \tau(\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}, \{i'_1, i'_2, \ldots, i'_{k'}\}) e_{j_1} e_{j_2} \ldots, e_{j_l}
\end{aligned}
$$

con $A = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $A = \{i'_1, i'_2, \ldots, i'_{k'}\}$, $A \triangle A' = \{j_1, j_2, \ldots, j_l\}$.

*1.6.* Definición. Sea $n \geq 0$. Sean $0 \leq p \leq n$, $0 \leq q \leq n$ con $p + q = n$. El álgebra de Clifford (real) $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ (o $\mathbb{R}_{p,q}$) es la $\mathbb{R}$-álgebra formada de todas las sumas formales

$$x = \sum_{A \in 2^n} x_A e_A$$

donde $x_A \in \mathbb{R}$, con las siguientes operaciones aritméticas:

(1) $\displaystyle\sum_{A \in 2^n} x_A e_A + \sum_{A \in 2^n} x'_A e_A = \sum_{A \in 2^n} (x_A + x'_A) e_A;$

(2) $\displaystyle\left(\sum_{A \in 2^n} x_A e_A\right)\left(\sum_{A \in 2^n} x'_A e_A\right) = \sum_{B \in 2^n} y_B e_B,$

donde

$$y_B = \sum_{A \triangle A' = B} \tau(A, A') x_A x_{A'}.$$

(4) $\displaystyle r\left(\sum_{A \in 2^n} x_A e_A\right) = \sum_{A \in 2^n} (r x_A) e_A$ para $r \in \mathbb{R}$.

Así $e_0x = x = xe_0$ para cualquier $x \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$. La notacion para una suma de $2^n$ términos $\sum_{A\in 2^n} x_A e_A$ se simplifica cuando muchos de los $x_A$ valen cero. Por ejemplo, en $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ uno escribe $e_{12}$ en lugar de

$$0e_0 + 0e_1 + 0e_2 + 1e_{12} + 0e_{13} + 0e_{23} + 0e_{123}$$

o $e_1e_2$ en lugar de

$$0e_0 + 0e_1 + 0e_2 + 1e_1e_2 + 0e_1e_3 + 0e_2e_3 + 0e_1e_2e_3.$$

Para $p + q \geq 2$, $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ no es conmutativo, pues $e_1e_2 \neq e_2e_1$. (Nótese que $e_{12} \neq 0$ porque $e_{\{1,2\}}$ es uno de los $2^n$ posibles sumandos en la definición.) Hay que tener cuidado de precisar en qué espacio uno está trabajando. En $\mathcal{C}\ell_{0,n}$,

$$(1 + e_1)(1 - e_1) = 2,$$

mientras que en $\mathcal{C}\ell_{n,0}$,

$$(1 + e_1)(1 - e_1) = 0.$$

*1.7.* Escribimos $|A|$ = número de elementos del conjunto $A$.

Definición. Sea $0 \leq k \leq n$. El subespacio lineal de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ generado por los $e_A$ con $|A| = k$ se llama $\mathcal{C}\ell^k_{p,q}$, y sus elementos (aparte del 0) se llaman $k$-vectores o elementos de grado $k$. (Los elementos que no son $k$-vectores se llaman mixtos.)

La dimensión de $\mathcal{C}\ell^k_{p,q}$ es $\binom{n}{k}$ y la dimensión de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ es $2^n$. Un 0-vector se llama un escalar, un 1-vector se llama un vector y un $n$-vector se llama un seudoescalar. Una suma de un escalar y un vector se llama un paravector. Un escalar frecuentemente se identifica con un número real: $\mathcal{C}\ell^0_{p,q} \cong \mathbb{R}$, pensamos en $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{C}\ell_{p,q}$ con $re_0 = r$.

Ejercicio. El cuadrado de un seudoescalar es un escalar.
El cuadrado de un paravector es un paravector.

Ejercicio. Dados $i_1, \ldots, i_k$ distintos, $e_{i_1} \cdots e_{i_k} = (-1)^{k(k-1)/2} e_{i_k} \cdots e_{i_1}$.

*1.8.* Cualquier $x \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$ puede descomponerse de forma única como una suma

$$x = [x]_0 + [x]_1 + \cdots + [x]_n$$

donde $[x]_k = \sum_{|A|=k} x_A e_A \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^k$. Así $\mathcal{C}\ell_{p,q} = \bigoplus_{0=1}^n \mathcal{C}\ell_{p,q}^k$.
Un caso importante es la parte escalar $\mathrm{Sc}\, x = [x]_0$.
Las partes de $x$ de grado par o impar son

$$[x]_+ = \sum_{|A| \text{ par}} x_A e_A, \quad [x]_- = \sum_{|A| \text{ par}} x_A e_A.$$

Así $[x]_+$ es la proyección de $x$ a la subalgebra $\mathcal{C}\ell_{p,q}^+$ generada por los $\mathcal{C}\ell_{p,q}^k$ con $k$ par. De manera similar $[x]_-$ está en el subespacio lineal $\mathcal{C}\ell_{p,q}^-$ formada de sumas de elementos de $\mathcal{C}\ell_{p,q}^k$ con $k$ impar (que no es una subálgebra). Claramente $x = [x]_+ + [x]_-$.

*1.9.* Definición. El conjugado $\overline{x}$ de $x \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$ es

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \sum_{k=0}^n (-1)^{k(k+1)/2} [x]_k \\ &= [x]_0 - [x]_1 - [x]_2 + [x]_3 + [x]_4 - [x]_5 - \cdots\end{aligned}$$

Cuando $x$ es un paravector, $(1/2)(x+\overline{x}) = \mathrm{Sc}\, x$. El exponente extraño en la definición de $\overline{x}$ es para hacer válido lo siguiente.

Proposición. $\overline{rx} = r\overline{x}$, $\overline{(\overline{x})} = x$; $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$; $\overline{(xy)} = \overline{y}\,\overline{x}$; $\overline{e_0} = e_0$; $\overline{e_i} = -e_i$ para $i \geq 1$.

Demostración. La única parte difícil es $\overline{(xy)} = \overline{y}\,\overline{x}$. Es trivial cuando $|A| = 0$, luego veamos el caso de $|A| = 1$:

$$\overline{e_i E_B} = \overline{e_B}\,\overline{e_i}. \qquad (*)$$

Para ello, Caso 1: $i \notin B$. Sea $s = \#\{t\colon\ j_t < 1\}$ donde $B = \{j_1, \ldots, j_l\}$ con $j_1 < \cdots < j_{s-1} < i < j_s < \cdots < j_l\}$. Entonces

$$\begin{aligned}e_i e_B &= (-1)^s e_{B\cup\{i\}}, \\ \overline{e_i e_B} &= (-1)^s \overline{e_{B\cup\{i\}}} = (-1)^{\frac{(l+1)(l+2)}{2}+s} e_{B\cup\{i\}}, \\ \overline{e_i} &= -e_1, \quad \overline{e_B} = (-1)^{\frac{l(l+1)}{2}} e_B, \\ \overline{e_B}\,\overline{e_i} &= (-1)^{\frac{l(l+1)}{2}+1} e_B e_i = (-1)^{\frac{l(l+1)}{2}+1} (-1)^{l-s} e_{B\cup\{i\}} \\ &= (-1)^{\frac{l(l+1)}{2}+l+1-s} e_{B\cup\{i\}}.\end{aligned}$$

Comparamos los exponentes,

$$\big(\frac{l(l+1)}{2} + l + 1 - s\big) - \big(\frac{(l+1)(l+2)}{2} + s\big) = 2(l+1-s) \in 2\mathbb{Z},$$

luego los coeficientes de $e_{B\cup\{i\}}$ son iguales, $\overline{e_i e_B} = \overline{e_B}\ \overline{e_i}$.

<u>Caso 2</u> $i \in B$. Sea $s$ tal que $j_s = i$. Entonces independientemente del valor de $e_i^2 = \pm 1$,

$$\begin{aligned}
e_i e_B &= (-1)^{s-1} e_{B\setminus\{i\}} e_i^2,\\
\overline{e_i e_B} &= (-1)^{s-1} e_i^2 (-1)^{\frac{l(l-1)}{2}} e_{B\setminus\{i\}} = (-1)^{\frac{l(l-1)}{2}+s-1} e_i^2 e_{B\setminus\{i\}},\\
\overline{e_B}\ \overline{e_i} &= (-1)^{\frac{l(l+1)}{2}+1} e_B e_i = (-1)^{\frac{l(l+1)}{2}+1} (-1)^{l-s} e_i^2 e_{B\cup\{i\}}\\
&= (-1)^{\frac{l(l+1)}{2}+l+1-s} e_{B\cup\{i\}}.
\end{aligned}$$

Nuevamente la diferencia de los exponentes está en $2\mathbb{Z}$ y tenemos la misma conclusion.

Ahora supongamos que $\overline{e_A e_B} = \overline{e_B}\ \overline{e_A}$ cada vez que $|A| \le k-1$. Sea $|A| = k$. Apliquemos la hipótesis inductiva tres veces, junto con la asociatividad:

$$\begin{aligned}
\overline{e_A e_B} &= \overline{e_{i_1} e_{A\setminus\{i_1\}} e_B} = \overline{e_{A\setminus\{i_1\}} e_B}\ \overline{e_{i_1}}\\
&= \overline{e_B}\ \overline{e_{A\setminus\{i_1\}}}\ \overline{e_{i_1}} = \overline{e_B}\ \overline{e_{i_1} e_{A\setminus\{i_1\}} e_{i_1}}\\
&= \overline{e_B}\ \overline{e_A}. \qquad \square
\end{aligned}$$

*1.10.* <u>Definición.</u> La <u>norma</u> de $x \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$ es $|x| = \left( \sum_{A \in 2^n} (x_A)^2 \right)^{1/2}$.

Es igual a la norma del vector $(x_0, \ldots, x_{123\ldots n}) \in \mathbb{R}^{2^n}$ formado de todos los coeficientes en $x$. De la misma manera tenemos el producto punto (producto vectorial escalar en $\mathbb{R}^{2^n}$)

$$x \cdot y = \sum_{A \in 2^n} x_A\, y_A,$$

luego $|x|^2 = x \cdot x$. Claramente $x \cdot y = y \cdot x = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

<u>Proposición.</u> $|rx| = r|x|$ para $r \in \mathbb{R}$; $\quad |\overline{x}| = |x|$;

$$\big||x| - |y|\big| \le |x - y| \le |x| + |y|.$$

Así $|x + y| \le |x| + |y|$. Simplemente son hechos acerca de vectores, no usan la multiplicación de Clifford.

Ejemplo. $x = e_1e_2 + e_3e_4$, $y = e_1e_3 + e_2e_4$, luego $xy = 0$ en $\mathcal{C}\ell_{0,4}$ y en $\mathcal{C}\ell_{4,0}$. Pero en $\mathcal{C}\ell_{2,2}$,

$$xy = 2e_1e_4 - 2e_2e_3$$

y luego $|x| = |y| = \sqrt{2}$, $|xy| = 2\sqrt{2}$, que es más grande que $|x||y| = 2$.

Proposición. Sean $x, y \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$. Entonces $|xy| \leq 2^{n/2}|x|\,|y|$.

Demostración. Primero notemos que $|rx| = r|x|$, pues

$$\Big|r\sum_A x_Ae_A\Big| = \Big|\sum_A (rx_A)e_A\Big| = \Big(\sum_A (rx_A)^2\Big)^{1/2} = |r|\,\Big(\sum_A (x_A)^2\Big)^{1/2}.$$

Además notemos que $|xe_{A'}| = |x|$ porque

$$xe_{A'} = (\sum_A x_Ae_A)e_{A'} = \sum_A x_A(e_Ae_{A'})$$

y la colección de $2^n$ elementos básicos $\{e_Ae_{A'}\}_A$ es igual a $\{e_A\}_A$, y la suma de $x_A^2$ no depende del orden.
Ahora

$$\begin{aligned}|xy| &= \Big|x\sum_{A'} y_{A'}e_{A'}\Big| = \Big|\sum_{A'} y_{A'}(xe_{A'})\Big| \leq \sum_{A'} |y_{A'}(xe_{A'})| \\ &= \sum_{A'} |y_{A'}|\,|xe_{A'}| = \sum_{A'} |y_{A'}|\,|x| = |x|\sum_{A'} |y_{A'}| \\ &\leq |x|\Big(\sum_{A'} |y_{A'}|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{A'} 1^2\Big)^{1/2} = 2^{n/2}|x|\,|y|. \quad \square\end{aligned}$$

*1.11.* Casos particulares de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$

• $\mathcal{C}\ell_{0,0}$ es la colección de todos los $re_0$ con $r \in \mathbb{R}$. Por ello $re_0 \leftrightarrow r$ es un isomorfismo $\mathcal{C}\ell_{0,0} \cong \mathbb{R}$.

• $\mathcal{C}\ell_{0,1}$ y $\mathcal{C}\ell_{1,0}$ son ambas la colección de todas las sumas $x_0e_0 + x_1e_1$ con $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Para $\mathcal{C}\ell_{0,1}$, la relacion $e_1^2 = -1$ nos dice que hay un isomorfosmo $x_0e_0 + x_1e_1 \leftrightarrow x_0 + ix_1$ con los números complejos, $\mathcal{C}\ell_{0,1} \cong \mathbb{C}$. Para $\mathcal{C}\ell_{1,0}$, la la relacion $e_1^2 = 1$ da un álgebra distinta (pues tiene divisores de cero), que se llama los números duales o números hiperbólicos.

• $\mathcal{C}\ell_{2,0}$ tiene como elemento típico $x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_{12}e_{12}$. La regla de la multiplicación es

$$\begin{aligned}(x_0 + x_1e_1 + &x_2e_2 + x_{12}e_{12})(y_0 + y_1e_1 + y_2e_2 + y_{12}e_{12}) = \\ &(x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_1 + x_{12}y_{12}) \\ &+ (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_{12} + x_{12}y_2) \\ &+ (x_0y_2 + x_1y_{12} + x_2y_0 + x_{12}y_1) \\ &+ (x_0y_{12} + x_1y_2 + x_2y_1 + x_{12}y_0).\end{aligned}$$

Definimos

$$T(x) = \begin{pmatrix} x_0 + x_2 & x_1 - x_{12} \\ x_1 + x_{12} & x_0 - x_2 \end{pmatrix}$$

y checamos $T(x + y) = T(x) + T(y)$, $T(xy) = T(x)T(y)$, $T(rx) = rT(x)$, y que toda matriz es alguna $T(x)$. Así $T\colon \mathcal{C}\ell_{2,0} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ es un isomorfismo, $\mathcal{C}\ell_{2,0} \cong R^{2\times 2}$.

• $\mathcal{C}\ell_{0,2}$ es muy interesante y dedicaremos una gran parte del curso a su estudio.

Proposición. $\mathcal{C}\ell_{p+1,q} \cong \mathcal{C}\ell_{q+1,p}$.

Demostración. Dado que algunos "$e_i$" tienen distintos cuadrados según el símbolo denote un elemento de un espacio u otro, en $\mathcal{C}\ell_{p+1,q}$ escribiremos la base como $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_{p+1}, \check{e}_1, \dots, \check{e}_q$ donde para $1 \leq i \leq p + 1$, $\hat{e}_i = e_i \in \mathcal{C}\ell_{p+1,q}$, y para $1 \leq i \leq q$, $\check{e}_i = e_{p+1+i} \in \mathcal{C}\ell_{p+1,q}$. Así $\hat{e}_i^2 = 1$, $\check{e}_i^2 = -1$.

Escribiremos los elementos básicos de $Cl_{q+1,p}$ con una notación similar: para $1 \leq i \leq q + 1$, $\hat{E}_i = e_i \in \mathcal{C}\ell_{q+1,p}$, y para $1 \leq i \leq p$, $\check{E}_i = e_{q+1+i} \in \mathcal{C}\ell_{q+1,p}$. Así $\hat{E}_i^2 = 1$, $\check{E}_i^2 = -1$.

Ahora definimos

$$\begin{aligned} T(\hat{e}_i) &= \check{E}_i\hat{E}_{q+1} \quad (1 \leq i \leq p), \\ T(\hat{e}_{p+1}) &= \hat{E}_{q+1}, \\ T(\check{e}_i) &= \hat{E}_i\hat{E}_{q+1} \quad (1 \leq i \leq q), \end{aligned}$$

además $T(1) = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} T(\hat{e}_i)^2 &= (\check{E}_i\hat{E}_{q+1})^2 = -\check{E}_i^2\hat{E}_{q+1}^2 = -(-1)(1) = 1 = T(\hat{e}_i^2) \ (1 \leq i \leq p), \\ T(\hat{e}_{p+1}^2) &= \check{E}_{q+1}^2 = 1 = T(\hat{e}_{p+1})^2, \\ T(\check{e}_i)^2 &= (\hat{E}_i\hat{E}_{q+1})^2 = -\hat{E}_i^2\hat{E}_{q+1}^2 = -(-1)(-1) = -1 = T(\check{e}_i^2) \ (1 \leq i \leq q). \end{aligned}$$

Extendemos por la regla multiplicativa a cada elemento básico de $\mathcal{C}\ell^k_{p+1,q}$:

$$T(e_{j_1}\cdots e_{j_k}) = T(e_{j_1})\cdots T(e_{j_k})$$

donde cada $e_j$ es un $\hat{e}_i$ o un $\check{e}_i$. Se extiende por linealidad a una function $T\colon \mathcal{C}\ell_{p+1,q} \to \mathcal{C}\ell_{q+1,p}$. Del hecho que $T(e_j)^2 = T(e_j)^2$ se sigue que $T$ es un homomorfismo de álgebras. Es sobre porque

$$\begin{aligned} T(\hat{e}_i\hat{e}_{p+1}) &= (\check{E}_i\hat{E}_{q+1})\hat{E}_{q+1} = \check{E}_i \quad (1 \le i \le p), \\ T(\check{e}_i\hat{e}_{p+1}) &= (\hat{E}_i\hat{E}_{q+1})\hat{E}_{q+1} = \hat{E}_i \quad (1 \le i \le q), \end{aligned}$$

luego todos los elementos básicos de $\mathcal{C}\ell_{q_1,p}$ están en la imagen de $T$. Por lo tanto $T$ es un isomorphismo. $\square$

*1.12.* Propiedades de $\mathcal{C}\ell_{0,n}$. Las álgebras de Clifford más usadas son para $p = 0$ y escribimos $\mathcal{C}\ell(n) = \mathcal{C}\ell_{0,n}$. Hay varios hechos que no se dan para las $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ en general.

Proposición. Sean $x, y \in \mathcal{C}\ell(n)$. Entonces $x \cdot y = \mathrm{Sc}(\overline{x}\, y) = \mathrm{Sc}(x\overline{y})$.

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} \overline{x}\, y &= \sum_A (-1)^{\frac{|A|(|A|+1)}{2}} x_A e_A \sum_B y_B e_B \\ &= \sum_A \sum_B (-1)^{\frac{|A|(|A|+1)}{2}} x_A y_B\, e_A e_B. \end{aligned}$$

Notemos que $e_A e_B$ es escalar precisamente cuando $A = B$, de otro modo $\mathrm{Sc}\, e_A e_B = 0$. Por lo tanto

$$\mathrm{Sc}(\overline{x}\, y) = \sum_A (-1)^{\frac{|A|(|A|+1)}{2}} x_A y_A e_A^2.$$

Ahora bien, $e_A^2 = (-1)^{\frac{|A|(|A|+1)}{2}}$, de lo cual la afirmación se sigue. $\square$

Corolario. Si $x \in \mathcal{C}\ell(n)$ es un paravector, entonces $|x|^2 = x\,\overline{x}$. Si $x$ es un paravector y $x \neq 0$, el elemento

$$x^{-1} = \frac{\overline{x}}{|x|^2}$$

es inverso multiplicativo de $x$.

Demostración. Sea $x = x_0 + \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Entonces

$$\begin{aligned} x\overline{x} &= (x_0 + \sum_{i=1}^n x_i e_i)(x_0 - \sum_{j=1}^n x_j e_j) \\ &= x_0^2 - \sum_{i,j} x_i x_j e_i e_j + x_0 \sum_{i=1}^n x_i e_i - x_0 \sum_{j=1}^n x_j e_j. \end{aligned}$$

Las dos últimas sumatorias se cancelan, y

$$\sum_{i,j} x_i x_j e_i e_j = \sum_{i=1}^n x_i^2 e_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j e_i e_j + \sum_{i>j} x_i x_j e_i e_j.$$

as dos últimas sumatorias se cancelan, dejando

$$x\overline{x} = x_0^2 - \sum_{i=1}^n (-x_i^2) = |x|^2.$$

Además

$$x\Big(\frac{1}{|x|^2}\overline{x}\Big) = \frac{1}{|x|^2}(x\overline{x}) = e_0. \qquad \square$$

(En $\mathcal{C}\ell_{1,0}$, $(1+e_1)\overline{(1+e_1)} = 0 \neq |1+e_1|^2$.)

Proposición. Sean $x, y \in \mathcal{C}\ell(n)$, con por lo menos uno de $x$, $y$ un paravector. Entonces $|xy| = |x|\,|y|$.

Demostración. Sea $x$ un paravector. Entonces

$$\begin{aligned} |xy|^2 &= \mathrm{Sc}((\overline{xy})(xy)) = \mathrm{Sc}((\overline{y}\,\overline{x})(xy) = \mathrm{Sc}(\overline{y}|x|^2 y) = |x|^2\,\mathrm{Sc}(\overline{y}y) \\ &= |x|^2 |y|^2. \end{aligned}$$

Proposición. Sea $x \in \mathcal{C}\ell(n)$ un paravector con $|x| < 1$. Entonces $1-x$ es invertible.

Demostración. Recordemos que para $y \in \mathcal{C}\ell(n)$, $|y| \leq \sum_A |y_A|$. Entonces

$$\begin{aligned} \Big|\sum_m y_m\Big| &= \Big|\sum_m \sum_A y_{m,A} e_A\Big| \\ &= \Big|\sum_A (\sum_m y_{m,A}) e_A\Big| \leq \sum_A \Big|\sum_m y_{m,A}\Big|. \end{aligned}$$

Si cada $\sum_m y_{m,A}$ es una sucesión convergente en $\mathbb{R}$, entonces $\sum_m y_m$ es convergente en $\mathcal{C}\ell(n)$. Ahora,

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m \leq \sum_{m=0}^{\infty} |x|^m,$$

luego $a = \sum_{m=0}^{\infty} x^m$ es una sumatoria convergente, y

$$ax = xa = \sum_{m=1}^{\infty} x^m = a - 1,$$

de lo cual $a(1-x) = (1-x)a = 1$. $\square$

FUNCIONES HIPERHOLOMORFAS #2

## Geometría y Álgebras de Clifford

*2.1.* Trabajando con vectores en $\mathbb{R}^n$.

Definición. El grupo ortogonal $\mathrm{O}(n) = A \in \mathbb{R}^{n\times n}\colon\ AA^t = I\}$.

Tenemos $(\det A)^2 = \det A^2 = \det AA^t = \det I = 1$, luego $\det A = \pm 1$.

Definición. El grupo ortogonal especial
$\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n)\colon\ \det A = 1\}$.

$v, w$ son ortogonales, $v \perp w$, cuando $v{\cdot}w = 0$. Como vectores/matrices, es decir $v, w \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, tenemos $v \cdot w = (v^t)w$. Para $A \in \mathrm{O}(n)$,

$$(Av)\cdot(Aw) = (Av)^t\,(Aw) = (v^t)(A^t)Aw = (v^t)w = v\cdot w$$

y en particular $v \perp w \;\Rightarrow\; Av \perp Aw$ y

$$|Av| = |v|.$$

Otro tipo de isometría son las traslaciones $T(v) = v+b$, pues $|T(v) - T(v')| = |v - v'|$.

Proposición. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría $\iff$ $(\exists b \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathrm{O}(n))\ (\forall v \in \mathbb{R}^n)\ f(v) = Av + b$. ($f$ es lineal-afín.)

*2.2.* Para $v \neq 0$, el hiperplano ortogonal a $v \in \mathbb{R}^n$ es $v^\perp = \{w\colon\ w \perp v\}$.

Proposición. Dado $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, todo $u \in \mathbb{R}^n$ puede expresarse como $u = rv + w$ para únicos $r \in \mathbb{R}$, $w \in v^\perp$.

Demostración. Unicidad: si $rv + w = r'v + w'$, entonces $(r - r')v = w' - w \in v^\perp$, por lo que $(r - r')v = 0$, $r' = r$. De esto $w' = w$.

Para encontrar $r$, $w$, notamos $u\cdot v = rv\cdot v + w\cdot v = r|v|^2 + 0$. Entonces

$$r = \frac{u\cdot v}{|v|^2},$$

$$w = u - rv = u - \frac{u\cdot v}{|v|^2}v. \quad \square$$

*2.3.* Definición. La reflexión de $u \in \mathbb{R}^n$ en el hiperplano ortogonal a $v$ es $\mathrm{Refl}_v(u) = w - rv$ donde $u = w + rv$, $w \perp v$.

Así

$$\mathrm{Refl}_v(u) = \big(u - \frac{u \cdot v}{|v|^2} v\big) - \frac{u \cdot v}{|v|^2} v = u - 2\frac{u \cdot v}{|v|^2} v.$$

Ahora pensamos en $v \in \mathbb{R}^n$ como el número de Clifford

$$v_1 e_1 + \cdots v_n e_n \in \mathcal{C}\ell^1_{0,n}\,.$$

Recordemos que con la multiplicacion de Clifford,

$$u \cdot v = -\frac{1}{2}(uv + vu), \quad v^2 = -|v|^2.$$

Con esta notación

$$\begin{aligned}
\mathrm{Refl}_v(u) &= u - 2\frac{u \cdot v}{|v|^2} v = u + \frac{2\,\frac{1}{2}(uv + vu)}{|v|^2} \\
&= u + \big(u\frac{v}{|v|^2} + \frac{v}{|v|^2}u\big)v \\
&= \frac{vuv}{|v|^2} = -\frac{vuv}{v^2}.
\end{aligned}$$

(En la práctica uno usaría $\mathrm{Refl}_v$ con $|v| = 1$.)

Con la multiplicación de Clifford es fácil checar que $\mathrm{Refl}_v$ es una isometría que fija el origen. Resulta que no está en $\mathrm{SO}(n)$. Las composiciones finitas de reflexiones producen todos elementos de $\mathrm{O}(n)$ (rotaciones).

*2.4.* La bola unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$ es

$$\mathbb{B}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}\colon\ |x| < 1\}.$$

La esfera unitaria es

$$\mathbb{S}^n = \partial\mathbb{B}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}\colon\ |x| = 1\}.$$

La inversión geométrica en $\mathbb{S}^n$ es

$$\rho(x) = \frac{x}{|x|^2}.$$

Se define $\rho(0)$ como un punto ideal $\rho(0) = \infty$, en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, y $\rho(\infty) = 0$. Para $x \in \mathbb{S}^n$ tenemos $\rho(x) = x$. Los puntos $0$, $x$, $\rho(x)$ son colineales.

Por composición con $x \to rx$ obtenemos la inversión en la esfera $r\mathbb{S}^n = \{x\colon\ |x| = r\}$ de radio $r$, $x \mapsto r^2x/|x|^2$, y por composición con $x \mapsto x + p$ obtenemos más generalmente la inversión en una esfera con centro en $p \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$x \mapsto p + \frac{r^2(x-p)}{|x-p|^2}.$$

*2.5.* <u>Proposición.</u> La inversion en una esfera es una transformación conforme.

<u>Demostración.</u> Dado que la traslación y la homotecia son conformes, sólo tenemos que verificar que $\rho$ es conforme. Tenemos $\dfrac{\partial}{\partial x_i}|x|^2 = 2x_i$, luego

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x|^2} = \frac{-2x_i}{|x|^4}.$$

De esto

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial x_i} = |x|^{-4}(|x|^2 + 2x_i^2),$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial x_j} = -|x|^{-4}2x_ix_j \quad (i \neq j).$$

Luego la matriz jacobiana $J_\rho = \big(\dfrac{\partial \rho_i}{\partial x_j}\big)$ en el punto $x$, aplicada a un vector $u \in \mathbb{R}^n$ da

$$J_\rho(u) = \frac{u}{|x|^2} - 2\frac{u \cdot x}{|x|^4}.$$

Así $J_\rho$ es la composición de la homotecia $u \mapsto u/|x|^2$ con la funcion

$$v \mapsto v - 2(v \cdot x)\frac{x}{|x|^2} = \mathrm{Refl}_x(v).$$

Como $\mathrm{Refl}_x \in O(n{+}1)$ conserva ángulos, $J_\rho$ lo hace también, es decir,

$$\mathrm{áng}(J_\rho(u), J_\rho(v)) = \arccos\frac{J_\rho(u)\cdot J_\rho(v)}{|J_\rho(u)|\,|J_\rho(v)|} = \arccos\frac{u \cdot v}{|u|\,|v|} = \mathrm{áng}(u,v)$$

lo cual significa que $\rho$ es conforme. $\square$

*2.6.* Definición. Una transformación de Möbius es una función $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1} \to \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ que es composición de un número par de transformaciones cada una de las cuales sea o bien una inversión en una esferaas o una reflexión en un hiperplano.

El propósito de usar un número par es para que transformaciones no sólo sean conformes sino que también conserven la orientación, $\det J_f > 0$. Puede notarse que la reflexión en la esfera de radio $r$ con centro en $p = r$ (que fija el 0), es

$$x \mapsto r + \frac{r^2(x-r)|}{|x-r|^2} = \frac{r\overline{x}(x-r)}{|x-r|^2}.$$

Cuando $r \to \infty$ el límite es

$$-\overline{x} = \mathrm{Refl}_{e_0}(x).$$

Así, las reflexiones pueden obtenerse como casos límite de inversiones en esferas.

Para usar las álgebras de Clifford en este contexto, notemos que considerando $x$ como un paravector en $\mathcal{C}\ell(n)$, tenemos

$$\frac{x}{|x|^2} = x|x|^{-2} = x(\overline{x}x)^{-1} = xx^{-1}\overline{x}^{-1} = \overline{x}^{-1}.$$

La conjugación nos da una "inversión algebraica" $x^{-1}$, que es una transformación de Möbius. Las traslaciones $x \to x + p$ son composiciones de reflexiones en dos hiperplanos perpendiculares a $p$, y las homotecias $x \to rx$ son composiciones de inversiones en dos esferas concéntricas.

*2.7.* Consideremos la composición de la conjugacion seguida de una inversión:

$$\begin{aligned} p + \frac{r^2(\overline{x}-\overline{p})}{|\overline{x}-p|^2} &= p + r^2(\overline{x}-\overline{p})(\overline{x}-\overline{p})^{-1}(x-p)^{-1} \\ &= p + r^2(x-p)^{-1} = (px + (r^2 - p^2))(x-p)^{-1}. \end{aligned}$$

Ésta expresión es un exemplo de la forma general

$$f(x) = (ax+b)(cx+d)^{-1}$$

actuando en $x \in \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$. La composición de dos expresiones de esta forma es otra más,

$$\begin{gathered}\big(a_2(a_1x+b_1)(c_1x+d_1)^{-1}+b_2\big)\big(c_2(a_1x+b_1)(c_1x+d_1)^{-1}+d_2\big)^{-1} = \\ \big((a_2a_1+b_2c_1)x+(a_1b_1+b_2d_1)\big)\big((c_2a_1+d_2c_1)x+(c_2b_1+d_2d_1)\big)^{-1}.\end{gathered}$$

Todas las transformaciones de Möbius son de esta forma. El grupo de Clifford $\mathcal{C}\ell\Gamma(n+1)$ es el grupo generado generado por todos los paravectores en $\mathcal{C}\ell(n)$ distintos del cero (que son todos invertibles). Si limitamos los coeficientes $a, b, c, d$ a elementos de $\mathcal{C}\ell\Gamma(n+1)\cup\{0\}$, la inversa es

$$f^{-1}(y) = (dy-b)(-cy+a)^{-1}$$

cuando $a, b, c, d$ satisfacen las ciertas condiciones adicionales.