FUNCIONES HIPERHOLOMORFAS
Lista 2

(entregar: 4 de abril)

1. Sean $u, v \in \mathbb{R}^n = \mathcal{C}\ell^1(n)$ vectores. Sea $u \perp v$. Demostrar que las reflecciones Refl_u y Refl_v conmutan.

2. (i) Se define $\mathrm{Spin}(n) = \{v_1 v_2 \cdots v_{2k}\colon\ v_j \in \mathcal{C}\ell^1(n),\ |v_j| = 1\}$ (productos de un número par de vectores unitarios, incluyendo el producto vacío e_0). Demostrar que $\mathrm{Spin}(n)$ es un grupo con respecto a la multiplicación.
(ii) Para $s \in \mathrm{Spin}(n)$ defínase la función h_s por $h_s(x) = \overline{s}xs$ para $x \in \mathbb{R}^n = \mathcal{C}\ell^1(n)$. Demostrar que $h_s(x) \in \mathbb{R}^n$ y que $h_s \in SO(n)$. Demostrar que la función $s \mapsto h_s$ es un homomorfismo de grupos: $\mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$.

3. Calcular todos los polinomios de Fueter de grados 1 y 2 (en términos de las variables de Fueter, además en términos de la variable x.

4. Demostrar que las potencias $(z_k)^m$ de las variables de Fueter $z_k = x_k - x_0 e_k$ en $\mathcal{C}\ell(n)$ son monogénicos por la izquierda y por la derecha.

5. Demostrar que los valores que toman los polinomios de Fueter son paravectores.

6. Consideremos el seudovector básico $a = e_1 \cdots e_n \in \mathcal{C}\ell(n)$, así $a^2 = \tau e_0$ donde $\tau = \pm 1$ es un signo que depende de n, es decir $\tau a^2 = 1$.
(i) Demostrar que $ae_i a = (-1)^{n-1}\tau e_i$ para $i \geq 1$.
(ii) Supongamos que n es par. Sea $f(x)$ un paravector en $\mathcal{C}\ell(n)$ (con x en un dominio en $\mathbb{R}^{n+1}$). Demostrar que $afa = \tau\overline{f}$.
(iii) También con n par, demostrar que $a\overline{\partial}a = \partial$.
(iv) Supongamos n par y f diferenciable, valuada en paravectores. Demostrar que f es monogénica por la izquierda si y sólo si f es monogénica por la derecha.