

FUNCIONES ARMÓNICAS

- 4.1. Sea $V = p + iq$ la velocidad de un fluido en alguna región del plano. Algunas propiedades físicas del fluido corresponden a propiedades matemáticas de V :

Ejemplo. Dado un (sub)dominio de Jordan con frontera una curva suave parametrizada por $z(t) = x(t) + iy(t)$, se calcula la cantidad neta de fluido que entra como sigue: el vector normal hacia dentro es $d\vec{n} = (-dy, dx)$, luego el flujo (neto) a través de la frontera es

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{n} = \oint (p, q) \cdot (-dy, dx) = \oint (q dx - p dy).$$

Decimos que el flujo es incompresible si el flujo es cero para cada subdominio de Jordan.

Ejemplo. La circulación alrededor de una curva cerrada es

$$\oint \vec{V} \cdot dz = \oint (p, q) \cdot (dx, dy) = \oint (p dx + q dy)$$

y el flujo se llama irrotacional si la circulación siempre es cero.

- 4.2. Fijemos (x_0, y_0) . Si V es incompresible, entonces la cantidad

$$\psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (q dx - p dy)$$

está bien definida en un área simplemente conexa (no depende del camino de integración); se llama el *potencial de velocidad*. Si V es irrotacional, entonces

$$\phi(x, y) = - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (p dx + q dy)$$

está bien definida; se llama el *potencial del fluido*.

Supongamos que V es tanto irrotacional como incompresible. Entonces tenemos $\phi_x = -p = \psi_y$; $\phi_y = -q = -\psi_x$. Así la función

$$U = \phi + i\psi = (\text{potencial del fluido}) + i(\text{potencial de velocidad})$$

es holomorfa, por lo que la velocidad $V = -\overline{U'}$ es antiholomorfa. Tanto ϕ como ψ son armónicas.

4.3. El gradiente

$$\nabla\phi = (\phi_x, \phi_y) = (-p, -q) = -V$$

es un vector paralelo a V y además perpendicular a las curvas de nivel $\phi = \text{const}$:

$$\phi(x(t), y(t)) = c \implies \phi_x x' + \phi_y y' = 0 \implies \nabla\phi \perp z'(t)$$

donde $z'(t)$ es el tangente a la curva de nivel. Por eso las curvas de nivel de ϕ son perpendiculares a V y también perpendiculares a las curvas de nivel de ψ .

Teorema. Un fluido incompresible e irrotacional fluye a lo largo de las curvas de nivel de su potencial de velocidad ψ .

4.4. Proposición. Sea u armónica en D ($u \in \text{Ar } D$) y sea $f: D' \rightarrow D$ holomorfa. Entonces $u \circ f$ es armónica en D' . Además, las curvas de nivel de $u \circ f$ son f^{-1} (curvas de nivel de u).

Esto permite convertir un problema de potencial en un dominio a un problema de potencial en otro dominio.

Problema de Dirichlet:
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } D, \\ u = h & \text{en } \partial D. \end{cases}$$

Problema de Neumann:
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } D, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = h & \text{en } \partial D. \end{cases}$$

Operador Dirichlet-Neumann: Dada h en ∂D , resolver el problema de Dirichlet, lo cual da una función u en el interior. Tomar la derivada normal $\partial u / \partial \vec{n}$, en los puntos de ∂D .

Operador de Hilbert: Dada h en ∂D , resolver el problema de Dirichlet, lo cual da una función u en el interior. Tomar un conjugado armónico v para u (quizás normalizado por $v(0) = 0$ o algo similar) y restringir a ∂D .

(Se usan los mismos nombres para los conceptos análogos correspondientes a otros operadores en lugar de Δ .)

4.5. PROPIEDADES DE FUNCIONES ARMÓNICAS

Coordenadas Polares. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

$$\frac{\partial \partial(x, y)}{\partial \partial(r, \theta)} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & -y \\ y/r & x \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \partial(r, \theta)}{\partial \partial(x, y)} = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \frac{\sin \theta}{r} & -\frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix}$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = r(ru_r)_r + u_{\theta\theta}$$

Por eso $u_1(z) = \log |z| = \log r$ y $u_2(z) = \arg z = \theta$ son funciones armónicas de (x, y) .

4.6. Teorema. (Propiedad del Valor Medio PVM) Sea $u \in \text{Ar } D$. Entonces cada vez que $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$ se tiene

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Definición. Decimos que $u \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ satisface el PVM si

$$(\forall z_0 \in D)(\forall r > 0) \overline{B_r(z_0)} \subseteq D \implies u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Decimos que $u \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ satisface el PVM en pequeños radios si $(\forall z_0 \in D)(\exists r_0 > 0)(\forall r < r_0) \dots$

4.7. Teorema. (Principio del Máximo PMax) sea $u \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ que satisface la PVM en pequeños radios en D . Si u no es idénticamente constante, entonces no hay punto de D en que u tome su valor máximo.

Nota. u satisface PVM en pequeños radios $\implies -u$ satisface PVM en pequeños radios $\implies -u$ no toma máximo si no es constante $\implies u$ no toma mínimo si no es constante. (“Principio del Mínimo”)

Corolario. Sea D un dominio acotado, $u \in \mathcal{C}(\text{cerr } D, \mathbb{R})$, $u|_D$ armónica, $u|_{\partial D} = 0$. Entonces $u = 0$.

Corolario. Una función armónica en un dominio acotado que tenga una extensión continua a la frontera está determinada por estos valores en la frontera.

PROBLEMA DE DIRICHLET

- 4.8. Fijemos $h: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ continua. ¿Existe $u \in \text{Ar } D$ con extensión continua a la frontera $u|_{\partial D} = h$? (Cuando D no es acotado, se podrá poner una condición de continuidad en el ∞ .)

Definición. D es un dominio de Dirichlet si para toda $h \in \mathcal{C}(\partial D, \mathbb{R})$ la respuesta a la pregunta es “sí”.

Ejemplo. $D = \{0 < z < 1\}$. Definamos $h(0) = 0$, $h(z) = 1$ para $|z| = 1$. Veremos que si existiera una solución al problema de Dirichlet, tendría que ser armónica en $z = 0$ también (es decir, armónica en $B_1(0)$), lo cual contradiría el Principio del Máximo. Así que D no es un dominio de Dirichlet.

- 4.9. La solución al Problema de Dirichlet *para un disco* es fácil y se llama la fórmula de Poisson. Consideremos u armónica en $B_{R+\epsilon}(0)$ e investiguemos la relación entre sus valores en $\partial B_R(0)$ y en un punto $p \in B_R(0)$. La transformación de Möbius

$$z = T(w) = \frac{R(w + p/R)}{(\bar{p}/R)w + 1} = \frac{R(Rw + p)}{\bar{p}w + R}$$

lleva $\{|w| < 1\}$ a $\{|z| < R\}$ con $0 \mapsto p$. La función $\tilde{u} = u \circ T$, o sea $\tilde{u}(w) = u(z)$, es armónica en $B_1(0)$ y por la PVM

$$u(p) = \tilde{u}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(e^{i\phi}) d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) \frac{d\phi}{d\theta} d\theta.$$

El núcleo de Poisson se define como $(1/2\pi)(d\phi/d\theta)$. (Una función en $[0, 2\pi]$ que es \mathbb{R} -valuada, pero que depende de p .) Para calcularlo, veamos la inversa

$$e^{i\phi} = w = \frac{Rz - Rp}{-\bar{p}z + R^2}$$

donde ahora $z = Re^{i\theta}$. Luego $dw = iw d\phi$, $dz = iz d\theta$, $d\phi/d\theta = (dw/dz)(z/w)$,

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\theta} &= \frac{R(R^2 - |p|^2)}{(-\bar{p}z + R^2)^2} \cdot z \cdot \frac{-\bar{p}z + R^2}{R(z - p)} \\ &= \frac{(R^2 - |p|^2)z}{(-\bar{p}z + \bar{z}z)(z - p)} \\ &= \frac{R^2 - |p|^2}{|z - p|^2}. \end{aligned}$$

Esto se puede expresar de muchas formas. La fórmula

$$\frac{z+p}{z-p} = \frac{(z+p)(\bar{z}-\bar{p})}{(z-p)(\bar{z}-\bar{p})}$$

nos da

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{R^2 - |p|^2}{|z-p|^2} = \operatorname{Re} \frac{z+p}{z-p}.$$

Teorema. Sea $u \in \mathcal{C}(\overline{B_R(0)}, \mathbb{R})$, u armónica en $B_R(0)$. Sea $p = R_0 e^{i\theta_0}$ donde $0 \leq R_0 < R$. Entonces

$$\begin{aligned} u(p) = u(R_0 e^{i\theta_0}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{R^2 - R_0^2}{|Re^{i\theta} - R_0 e^{i\theta_0}|^2} u(Re^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{R^2 - R_0^2}{R^2 - 2RR_0 \cos(\theta - \theta_0) + R_0^2} u(Re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Definición. Núcleo de Poisson

$$K(z, \theta) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}$$

para $|z| < 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

4.10. Sea $h \in \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Definición. La integral de Poisson de h es

$$P_h(z) = \int_0^{2\pi} K(z, \theta) h(\theta) d\theta$$

para $|z| < 1$.

Se tiene $P: h \mapsto P_h: \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R}) \rightarrow \operatorname{Ar}(B_1(0))$. También h podría ser cualquier función integrable. Para el disco $B_R(z_0)$ hay un kernel $K((z - z_0)/R, \theta)$ dando un operador $P_{z_0, R}(h)$.

Proposición. (1) P es un operador lineal.

(2) P es un operador positivo.

(3) P_c es constante cuando c es constante.

(4) Si $c_1 \leq h(\theta) \leq c_2$ para todo θ , entonces $c_1 \leq P_h(z) \leq c_2$ para todo z .

4.11. Proposición. (Schwarz) Sea $h : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continua por pedazos (o integrable+acotada) y sea h continua en θ_0 . Entonces

$$\lim_{\substack{z \rightarrow e^{i\theta_0} \\ |z| < 1}} P_h(z) = h(\theta_0).$$

4.12. Teorema. u satisface la PVM en pequeños radios $\implies u$ es armónica.

Proposición. $\text{Ar } D$ es cerrado en $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$.

4.13. Proposición. (Desigualdad de Harnack) Sea $u \in \text{Ar } B_R(0)$ con $u \geq 0$. Entonces para cada $z \in B_R(0)$ se tiene

$$\frac{R - |z|}{R + |z|} u(0) \leq u(z) \leq \frac{R + |z|}{R - |z|} u(0).$$

Proposición. (Teorema de Liouville) Sea $u \in \text{Ar } \mathbb{C}$, u acotada. Entonces u es constante.

Proposición. (Principio de Harnack) Sea $\{u_n\} \subseteq \text{Ar } D$ con $u_n \leq u_{n+1}$. Entonces o bien

- (a) $u_n \rightarrow \infty$ uniformemente en compactos de D , o bien
- (b) existe $u \in \text{Ar } D$ tal que $u_n \rightarrow u$ en $\text{Ar } D$.