PRODUCTOS INFINITOS,
FACTORIZACION DE WEIERSTRASS

3.1. El principio general a aplicarse será que cada concepto relacionado con productos infinitos puede pensarse como si fuera la “exponencial” del concepto correspondiente para sumatorias, pues

$$“ \prod z_j = e^{\sum \log z_j} = e^{\sum \zeta_j} ” .$$

En un producto queremos admitir la posibilidad de $z_j = 0$, entonces hay que admitir sumandos $\zeta_j = -\infty$ en una sumatoria. Suponiendo que hay un número finito de sumandos $-\infty$, diremos que la sumatoria converge a $-\infty$ cuando los términos distintos del $-\infty$ forman una serie convergente. Esto es diferente de una suma como $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j$ que diverge a $-\infty$.

Definición. Sean $z_j \in \mathbb{C}$. Decimos que $\prod z_j$ converge si (i) sólo un número finito de los z_j son cero: hay N tal que $j \geq N \implies z_j \neq 0$, y (ii) $\prod_{j=N}^n z_j$ tiende a un límite no-cero cuando $n \rightarrow \infty$.

(pensar qué correspondería en las sumatorias si el límite en (ii) fuera cero)

El valor del producto convergente es 0 si algún factor es 0, de otro modo el valor es $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n z_j$.

Ejemplo. $\prod_{j=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{j})$ diverge a cero.

3.2. Proposición. $\prod z_j$ converge $\implies z_j \rightarrow 1$ cuando $j \rightarrow \infty$.

Proposición. Sean $1 + b_j = z_j \notin (-\infty, 0]$. Entonces $\prod (1 + b_j)$ converge $\iff \sum \log(1 + b_j)$ converge, donde $\log$ significa la rama principal, $|\arg \log z| < \pi$.

3.3. Ejemplo. $\prod (-1)^j$ no converge, pero $\prod |(-1)^j|$ sí converge!

Definición. Decimos que $\prod(1 + b_j)$ converge absolutamente cuando $\sum \log(1 + b_j)$ converge absolutamente.

Proposición. $\prod(1 + b_j)$ converge absolutamente $\iff$
 $\sum b_j$ converge absolutamente.

FACTORIZACION DE WEIERSTRASS

Aunque la representación de una función holomorfa $f(z) = \sum_0^\infty c_j z^j$ es útil para muchas cosas, da poca información sobre los ceros de f . Para polinomios, tenemos $p(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n)$ pero por lo que ya sabemos de productos, sería mejor escribir

$$c\left(1 - \frac{z}{a_1}\right)\left(1 - \frac{z}{a_2}\right) \cdots$$

Igual que con el estudio de las fracciones parciales, no podemos esperar que $\prod(1 - z/a_j)$ converja siempre.

Ejemplo. sen πz debiera tener factores $1 - z/j$ pero $\prod(1 - z/j)$ diverge cuando $z \neq 0$.

3.4. Se ve que $\prod(1 - \frac{z}{a_j})$ converge absolutamente, y uniformemente en compactos $\iff \sum \frac{1}{a_j}$ converge absolutamente.

Esto pasará cuando hay “pocos” ceros (pensar en $a_j = j^2$ o $a_j = 2^j$). La rapidez de que los ceros tienden al infinito es una forma de medir el “tamaño” de una función entera.

Definición. Sean $a_j \rightarrow \infty$ (valores no necesariamente distintos). El exponente de convergencia de la sucesión $\{a_j\}$ es el mínimo entero μ tal que

$$\sum \frac{1}{|a_j|^{\mu+1}} < \infty.$$

Otra medida de una función entera es su tasa de crecimiento. Suponiendo que

$$|f(z)| \leq e^{a|z|^\lambda}$$

para $|z|$ grande, entonces $\log |f| \leq a|z|^\lambda$; $\log \log |f| \leq \log a + \lambda \log |z|$;

$$\frac{\log \log |f(z)|}{\log |z|} \leq \lambda + \frac{\log a}{\log |z|} \leq \lambda + \epsilon$$

para $|z|$ grande.

Definición. El orden de una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es el mínimo número λ tal que $(\forall \epsilon > 0)(\forall z \text{ grande})$

$$|f(z)| \leq e^{|z|^{\lambda+\epsilon}}.$$

Si no existe tal número, el orden es $\lambda = \infty$. Tenemos

$$\lambda = \limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{\log \log |f(z)|}{\log |z|}.$$

Cuando $\lambda < \infty$, el tipo de f es el mínimo a tal que $(\forall \epsilon > 0)(\forall z \text{ grande})$

$$|f(z)| \leq e^{(a+\epsilon)|z|^\lambda}.$$

Ejemplo. $\text{sen } z$ tiene orden 1; $\text{sen } 2z$ tiene orden 1; $\text{sen}^2 z$ tiene orden 1; $\text{sen } z^2$ tiene orden 2.

3.5. Definición. Un producto canónico para la sucesión $\{a_j\}$ es cualquiera de la forma

$$\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) e^{\frac{z}{a_j} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_j}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{a_j}\right)^3 + \dots + \frac{1}{m_j}\left(\frac{z}{a_j}\right)^{m_j}}.$$

Depende de la elección de los grados m_j de los polinomios $p_{m_j}(z/a_j)$. Un factor canónico es

$$E_0(u) = 1 - u;$$

$$E_m(u) = (1 - u)e^{p_m(u)} = (1 - u)e^{u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + \dots + \frac{1}{m}u^m}, \quad m \geq 1.$$

Teorema. (Factorización de Weierstrass) (a) Sea $a_j \rightarrow \infty$. Entonces existe una función entera cuyos ceros son precisamente estos valores a_j (repetidos según su multiplicidad).

(b) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Entonces existen enteros m , m_j y una función entera g tales que

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{j=m+1}^\infty \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) e^{\frac{z}{a_j} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_j}\right)^2 + \dots + \frac{1}{m_j}\left(\frac{z}{a_j}\right)^{m_j}}.$$

Corolario. Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Entonces existen $g_1, g_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tales que $f = g_1/g_2$.

Ejemplo. $\cos \pi z = \prod_{m \text{ impar}} \left(1 - \frac{2z}{m}\right) e^{2z/m}$

Nota. Hay resultados similares para $\mathcal{H}(D)$ y $\mathcal{M}(D)$ para cualquier dominio $D \subseteq \mathbb{C}$.

Definición. Sea $a_j \rightarrow \infty$ y supóngase que $\{a_j\}$ tiene exponente de convergencia finito μ . Entonces decimos que el producto canónico para $\{a_j\}$ es $\prod E_\mu(z/a_j)$.

Definición. Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y si los ceros $\{a_j\}$ de f tienen exponente de convergencia finito y si la función $g(z)$ en la factorización de Weierstrass es un polinomio, entonces decimos que el género de f es

$$\mu = \text{máx}(\text{exp. de conv. de } \{a_j\}, \text{grad}(g)).$$

Teorema. (de Hadamard) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de género μ y orden λ . Entonces

$$\mu \leq \lambda \leq \mu + 1.$$

(se omite la demostración)

En particular, si f es una función entera de orden 1 (o sea, de crecimiento no más que exponencial), entonces f admite una factorización sin el factor $e^{g(z)}$,