VARIABLE COMPLEJA $\#1$

ESPACIOS DE FUNCIONES $\mathcal{C}(D, \mathbb{C})$, $\mathcal{H}(D)$, $\mathcal{M}(D)$

1.1. Proposición. Dado K compacto: $C(K, \mathbb{C})$ es un espacio métrico completo con la métrica $d(f, g) = \sup_K |f - g|$.

Pero para dominios, $\sup_D |f - g|$ podría ser infinito. Un *rellenado* de un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ es una sucesión $\{K_n\}$ donde $D = \bigcup_1^\infty K_n$, K_n es compacto, $K_n \subseteq \operatorname{int} K_{n+1}$.

Construcción de un rellenado:

$$K_n = \overline{B_n(0)} \cap \{z \in D\colon\ \operatorname{dist}(z, \partial D) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Proposición. $K \subseteq D$ compacto. Entonces $K \subseteq K_n$ para algún n.

Dado $\{K_n\}$ se definen para $f, g \in C(D, \mathbb{C})$:

$$\rho_n(f, g) = \sup_{K_n} |f - g|, \quad \rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}.$$

Lema. $\alpha\colon\ [0, \infty) \to [0, \infty)$ suave, $\alpha(0) = 0$, $\alpha' > 0$, $\alpha'' < 0$. Entonces $\alpha(s) + \alpha(t) \geq \alpha(s + t)$.

Corolario. Si $a, b, c \geq 0$, $a + b \geq c$, entonces $\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b} \geq \dfrac{c}{1+c}$.

Proposición. ρ es una métrica en $\mathcal{C}(D, \mathbb{C})$.
(Su valor exacto depende del rellenado.)

Proposición. (1) Sea $\epsilon > 0$. Entonces existen $\delta > 0$, $K \overset{\text{cpto}}{\subseteq} D$ tales que

$$\sup_K |f - g| < \delta \implies \rho(f, g) < \epsilon.$$

(2) Sean $\delta > 0$, $K \overset{\text{cpto}}{\subseteq} D$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\rho(f, g) < \epsilon \implies \sup_K |f - g| < \delta.$$

Teorema. (a) Sea $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{C}(D,\mathbb{C})$. Entonces

$$\mathcal{O} \text{ es abierto} \iff \begin{array}{l}(\forall f \in \mathcal{O})(\exists \delta > 0,\ K \overset{\text{cpto}}{\subseteq} D) \\ \{g\colon \sup\limits_K |f-g| < \delta\} \subseteq \mathcal{O}.\end{array}$$

(b) $f_n \to f$ en $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ si y sólo si $f_n \to f$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D.
("La topología descrita en el Teorema es metrizable, y no depende del rellenado.")

1.2. Definición. Un subconjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ es una familia normal si cada sucesión $\{f_n\}$ en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión $\{f_{n_j}\}$ que converge a un elemento de $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ (no necesariamente en $\mathcal{F}$).

$\mathcal{H}(D) = \{f\colon D \to \mathbb{C},\ f \text{ holomorfa}\} \subseteq \mathcal{C}(D,\mathbb{C})$

Proposición. (a) $\mathcal{H}(D)$ es cerrado en $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$.
(b) der: $f \mapsto f'$ es una función continua $\mathcal{H}(D) \to \mathcal{H}(D)$.

Corolario. $\mathcal{H}(D)$ es un espacio métrico completo con la métrica ρ.

1.3. Teorema. (de Hurwitz) Sea $f_n \in \mathcal{H}(D)$, $f_n \to f$. Supóngase que ninguna f_n se anula en D. Entonces o bien f no se anula en D, o bien $f \equiv 0$.

Teorema. Sea $f_n \in \mathcal{H}(D)$, $f_n \to f$. Supóngase que ninguna f_n tiene más de k ceros en D (contando su multiplicidad). Entonces o bien f no tiene más de k ceros en D (contando su multiplicidad), o bien $f \equiv 0$.

VARIABLE COMPLEJA $\#2$

FRACCIONES PARCIALES, TEOREMA DE MITTAG-LEFFLER

2.1. Descomposición en *fracciones parciales* de una función racional R, donde los polos de R son $z_1, \dots, z_n$ (distintos):

$$R(z) = R_n(z) + \sum_1^n P_j \left(\frac{1}{z - z_j} \right)$$

donde R_n, P_j son polinomios. Los P_j tienen término constante nulo, $P_j(0) = 0$.

Una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ puede tener una infinidad de polos; no necesariamente se descompone como

$$\text{“ } f(z) = g(z) + \sum_1^\infty P_j \left(\frac{1}{z - z_j} \right) \text{ ”}$$

2.2. Ejemplo. $f(z) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{\pi^2}{6} z + O(z^3)$ puede escribirse

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} = \sum_{-n}^{n} \frac{(-1)^j}{z - j} + g_n(z)$$

para cualquier n finito, pero la serie no converge tomando $n \to \infty$.

Sería aún menos claro qué hacer con los puros términos para $j > 0$ (o cualquier otro subconjunto de j).

Teorema. (de Mittag-Leffler) Sean z_j distintos, $z_j \to \infty$, y sean P_j polinomios con término constante nulo. Entonces
(a) Existe una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ con precisamente las partes singulares $P_j(1/(z - z_j))$;
(b) Toda tal f puede escribirse

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{\infty} (P_j(\frac{1}{z - z_j}) - p_j(z))$$

donde los $p_j(z)$ son polinomios y $g(z)$ es una función entera.

2.3. <u>Ejemplo.</u>

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{j\neq 0} (-1)^j \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \right) + g(z).$$

<u>Ejemplo.</u>

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2}.$$

<u>Ejemplo.</u>

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{j\neq 0} \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \right).$$