

VARIABLE COMPLEJA II

Lista 3

(entregar: 21 de septiembre)

1. Evaluar la sumatoria $\sum_1^\infty n^{-4}$, empleando la descomposición en fracciones parciales de $\cot \pi z$.

2. Sea $g_2(z) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} (m + nz)^{-4}$.

(a) Demostrar que la serie doble converge a una función holomorfa en el semiplano $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$. (Recordar que las series dobles se pueden convertir en series simples, por ejemplo tomando $\{m + n \leq N\}$ e indexando con N .)

(b) Sea $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ (donde a, b, c, d enteros, $ad - bc = 1$). Demostrar:

$$g_2(T(z))T'(z)^2 = g_2(z).$$

3. Demostrar: $\prod_{k=0}^\infty (1 + \frac{1}{2^{2^k}}) = 2$.

4. ¿Cuáles de estos productos convergen/divergen? ¿absolutamente?
¿para cuáles z (en su caso)?

(a) $\prod_{k=1}^\infty (1 + (-1)^k k^{-1/3})$

(b) $\prod_{k=1}^\infty (1 + a_k)$, donde

$$a_k = 1/\sqrt{k} \text{ para } k \text{ impar, } a_k = -1/\sqrt{k} + 1/k \text{ para } k \text{ par.}$$

(c) $\prod_{k=1}^\infty (1 + \frac{z^2}{k^2})$

(d) $(1 - \frac{z}{1})(1 + \frac{z}{1})(1 - \frac{z}{2})(1 + \frac{z}{2})(1 - \frac{z}{3}) \cdots$